DM n^{o}5

Ce devoir est constitué de deux exercices et d'un problème (deux parties d'un devoir du concours Mines-Ponts).

EXERCICE I

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que :

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) > 0.$$

1. Montrer qu'il existe un réel strictement positif b tel que f soit strictement décroissante sur le segment $[-b, 0]$, strictement croissante sur le segment $[0, b]$.
2. Montrer qu'il existe un réel strictement positif η tel que pour tout élément λ de $]0, \eta]$, l'quation d'inconnue réelle x,
$$f(x) = \lambda$$
admette une unique solution dans $[-b, 0]$ notée $x_1(\lambda)$ et une unique solution dans $[0, b]$ notée $x_2(\lambda)$.
3. Montrer que la quantité $\frac{x_1(\lambda)+x_2(\lambda)}{2\lambda}$ admet une limite à déterminer, lorsque λ tend vers 0 par valeurs strictement supérieures.

EXERCICE II

Développements asymptotiques

Pour tout entier $n \geq 3$, on note P_n le polynôme $X^n - nX + 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, P_n admet une et une seule racine dans $]0, 1[$, notée x_n.
2. Donner un équivalent simple a_n de x_n lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$.
3. Donner un équivalent simple de $x_n - a_n$.

Remarquons qu'ainsi : $x_n = a_n + b_n + \mathrm{o}(b_n)$, *lorsque* $n \to +\infty$, *avec* $b_n = \mathrm{o}(a_n)$, *(développement asymptotique à deux termes à la précision* b_n*).*

PROBLÈME

Inégalité de Prékopa et Leindler

Notations.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. On désignera par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Pour tous réels a et b on notera $a\mathcal{A} + b\mathcal{B}$ la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$a\mathcal{A} + b\mathcal{B} = \{ax + by,\ x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}\}.$$

En particulier, pour $a = -1$, on écrit $-\mathcal{A} = \{-x,\ x \in \mathcal{A}\}$.

Si f désigne une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée sur $\mathbb{R}$, alors on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

Pour tout réel $\lambda > 0$, et tout réel $x > 0$ on note x^λ la quantité $\exp(\lambda \ln(x))$ et l'on convient que $0^\lambda = 0$.

Pour toute fonction $f\colon I \to \mathbb{R}_+$, tous $x \in I$ et $\lambda \in]0, 1[$, on écrira $f(x)^\lambda$ pour $(f(x))^\lambda$.

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler

1. Soient λ un réel dans l'intervalle $]0, 1[$, et a et b deux réels positifs. Montrer que

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda}.$$

On pourra introduire une certaine fonction auxiliaire dont on justifiera la concavité. Montrer en outre que pour tout réel $u > 1$,

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^u \leq \lambda a^u + (1-\lambda)b^u.$$

2. Soient a et b deux réels positifs et λ un réel dans $]0, 1[$. Montrer que

$$(a+b)^\lambda \leq a^\lambda + b^\lambda.$$

Dans toute cette partie, λ est un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, et f, g, h sont des fonctions de $\mathcal{C}^0(R, \mathbb{R}_+)$ intégrables qui satisfont l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité suivante, à laquelle on fera référence par "inégalité de Prékopa et Leindler", ou en abrégé "P-L" :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}. \tag{1}$$

Dans les questions 3, 4 et 5 on supposera de plus que f et g sont strictement positives, c'est-à-dire pour tout réel x, $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$.

3. On pose $F = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$. Montrer que pour tout t dans l'intervalle $]0,1[$, il existe un unique réel noté $u(t)$ et un unique réel noté $v(t)$ tels que

$$\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)\mathrm{d}x = t, \quad \frac{1}{G}\int_{-\infty}^{v(t)} g(x)\mathrm{d}x = t.$$

   On pourra étudier les variations de la fonction $u \mapsto \frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u} f(x)\mathrm{d}x$.

4. Montrer que les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,1[$ et, calculer pour chaque $t \in]0,1[$ les nombres dérivés $u'(t)$ et $v'(t)$.

5. Montrer que l'ensemble image de l'application w définie sur $]0,1[$ par

$$\forall t \in]0,1[, \quad w(t) = \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)$$

   est égal à $\mathbb{R}$, puis prouver que w définit un changement de variable de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant ce dernier et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)\mathrm{d}w$, montrer que f, g et h satisfont l'inégalité "P-L" (1).

   On pose $\Psi(u) = \exp(-u^2)$ pour tout réel u.

   A partir de maintenant, on suppose que les fonctions f, g et h sont seulement à valeurs positives ou nulles.

6. Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \Psi(x)^{\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda}.$$

   Soit M un réel strictement positif. On suppose dans les questions 7, 8 et 9 que f et g sont nulles en dehors de l'intervalle $[-M, M]$. On pose $\Lambda = \min(\lambda, 1-\lambda)$, $\Theta = \max(\lambda, 1-\lambda)$ et $\widehat{M} = M\max(\lambda, 1-\lambda)$. Pour chaque réel u, on pose :

$$\Psi_M(u) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\Theta^2}\left(|u| - \widehat{M}\right)^2\right), & \text{si } |u| > \widehat{M}, \\ 1, & \text{si } |u| \leq \widehat{M}. \end{cases}$$

7. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Prouver que si $|y| \leq M$, alors $\Psi(x) \leq \Psi_M(z)$. De même, prouver que si $|x| \leq M$ alors $\Psi(y) \leq \Psi_M(z)$.

8. Soit $\varepsilon \in]0,1[$, $f_\varepsilon = f + \varepsilon\Psi$ et $g_\varepsilon = g + \varepsilon\Psi$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x)^{\lambda} g_\varepsilon(y)^{1-\lambda} \leq h(z) + \varepsilon^{\Lambda}(\|f\|_\infty^{\lambda} + \|g\|_\infty^{1-\lambda})(\Psi_M(z))^{\Lambda} + \varepsilon\Psi(z),$$

   où $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On commencera par appliquer l'inégalité de la question 2, puis les deux questions précédentes. On rappelle que $f(x) = 0$ si $|x| > M$ et que $g(y) = 0$ si $|y| > M$.

9. En déduire que si f et g sont nulles en dehors d'un intervalle borné alors l'inégalité "P-L" est satisfaite.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\chi_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction *continue* qui vaut 1 sur $[-n, n]$, qui vaut 0 sur $]-\infty, -n-1] \cup [n+1, +\infty[$ et qui est affine sur chacun des deux intervalles $[-n-1, -n]$ et $[n, n+1]$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leq \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

11. Montrer que l'inégalité "P-L" (1) est satisfaite (si on choisit d'utiliser le théorème de convergence dominée alors on vérifiera soigneusement que ses conditions de validité sont remplies).

Partie II. Fonctions log-concaves

Soit n un entier strictement positif. On dira qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ est log-concave si pour tout λ dans l'intervalle $]0, 1[$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}.$$

12. Soit $N \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Prouver alors que l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \exp\left(-N(x)^2\right)$$

est continue et log-concave sur $\mathbb{R}^n$. On pourra observer que la fonction $u \mapsto u^2$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.