ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2001

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

On se propose d'établir quelques propriétés des sous-groupes discrets des espaces euclidiens. Dans tout le problème, on désigne par n un entier strictement positif, par E l'espace $\mathbf{R}^n$, par $(\ |\ )$ son produit scalaire usuel et par $\|\ \ \|$ la norme correspondante. On rappelle les faits suivants :

a) un sous-ensemble L de E est dit *discret* si tout élément x de L est isolé, *i.e.* admet un voisinage V dans E tel que $L \cap V = \{x\}$;

b) un groupe abélien G est isomorphe à un groupe $\mathbf{Z}^m$ si et seulement s'il admet une $\mathbf{Z}$-*base*, c'est-à-dire une famille $(e_1, \dots, e_m)$ telle que tout élément g de G s'écrive d'une façon unique sous la forme $g = \sum_{i=1}^{m} k_i e_i$ avec $k_i \in \mathbf{Z}$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Un sous-groupe L de E est discret si et seulement si l'élément 0 est isolé.

b) Tout sous-groupe discret L de E est fermé dans E.

c) Les sous-groupes discrets de $\mathbf{R}$ sont exactement les sous-ensembles de la forme $a\mathbf{Z}$ avec $a \in [0, +\infty[$.

2. On désigne par α un nombre réel > 0 et par L le sous-groupe de $\mathbf{R}$, ensemble des réels $m + n\alpha$ où $n, m \in \mathbf{Z}$. Montrer que L est discret si et seulement si α est rationnel.

3. Construire un sous-groupe discret L de $\mathbf{R}^2$ tel que sa première projection sur $\mathbf{R}$ ne soit pas discrète.

4. On se propose ici de démontrer que tout sous-groupe discret L de E est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe $\mathbf{Z}^m$. On désigne par F le sous-espace vectoriel de E engendré par L, par m sa dimension, par $(a_1, \dots, a_m)$ une base de F contenue dans L, et par L' le sous-groupe de L engendré par cette base. Enfin on pose

$$P = L \cap \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in [0, 1[\right\} .$$

a) Vérifier que P est un ensemble fini.

b) Etant donné un élément x de L, construire un couple $(y, z) \in L' \times P$ tel que l'on ait $x = y + z$, et démontrer son unicité.

c) Soit encore x un élément de L ; écrivant $kx = y_k + z_k$ (pour k entier > 0), montrer qu'il existe un entier $d > 0$ tel que l'on ait $dx \in L'$.

d) Conclure.

5. Dans cette question, L est un sous-groupe de $\mathbf{Z}^m$; ses éléments seront notés $x = (x_1, \dots, x_m)$; on posera $\pi(x) = x_m$.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 0$ et un élément x° de L tel que l'on ait

$$\pi(L) = k\mathbf{Z} = \pi(x^\circ)\mathbf{Z} .$$

b) On suppose ici $\pi(L)$ non réduit à $\{0\}$; étant donné un élément x de L, construire un couple $(p, \widetilde{x}) \in \mathbf{Z} \times L$ tel que l'on ait $\widetilde{x}_m = 0$ et $x = px^\circ + \widetilde{x}$; démontrer son unicité.

c) En déduire que tout sous-groupe discret de E est isomorphe à un groupe $\mathbf{Z}^r$.

6. On suppose ici $n = 2$ et on considère deux $\mathbf{Z}$-bases (u_1, u_2), (v_1, v_2) d'un même sous-groupe discret L de E. Comparer les aires des parallélogrammes construits respectivement sur (u_1, u_2) et (v_1, v_2).

Deuxième partie

7. Dans cette question, on désigne par B la base canonique de E et par $GL(E)$ le groupe des automorphismes linéaires de E. Pour toute partie X de E, on note $L(X)$ le sous-groupe de E engendré par X.

Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$ tel que les matrices des éléments de G dans la base B soient à coefficients rationnels. On note GB l'ensemble des vecteurs $g(x)$ où $g \in G$ et $x \in B$.

a) Montrer qu'il existe un entier $d > 0$ tel que l'on ait $dL(GB) \subset L(B)$.

b) Démontrer l'existence d'une base de E dans laquelle les matrices des éléments de G sont à coefficients entiers.

8. Soit A une matrice à n lignes et n colonnes, à coefficients rationnels, d'ordre fini r (c'est-à-dire que $A^r = I$ et que r est le plus petit entier > 0 ayant cette propriété).

a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est à coefficients entiers.

b) On suppose ici $n = 2$. Montrer que r ne peut prendre que les valeurs $1, 2, 3, 4, 6$ et donner, pour chacune de ces valeurs, un exemple de matrice d'ordre r à coefficients entiers.

Troisième partie

On désigne par $O(E)$ le groupe des automorphismes linéaires orthogonaux de E (ensemble des u de $GL(E)$ tels que $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x de E), et par $AO(E)$ l'ensemble des transformations de E de la forme

$$x \mapsto g(x) = u(x) + a \quad \text{où} \quad u \in O(E) \quad \text{et} \quad a \in E\ ;$$

on écrit alors $g = (u, a)$. On note e l'élément neutre de $O(E)$.

9. Montrer que $O(E)$ est compact.

10.a) Vérifier que $AO(E)$ est un groupe, écrire sa loi de groupe, préciser son élément neutre, puis l'inverse d'un élément (u, a).

b) Calculer $(u, a)\,(e, b)\,(u, a)^{-1}$.

11. On note ρ le morphisme $AO(E) \to O(E)$ défini par $\rho(u, a) = u$. On fixe un sous-groupe discret L de E qui engendre linéairement E et on note G le sous-groupe de $AO(E)$ formé des éléments g tels que $g(L) = L$.

a) Vérifier que, si un élément (u, a) de $AO(E)$ appartient à G, il en est de même de $(u, 0)$ et (e, a).

b) Montrer que $\rho(G)$ est fini.

c) Déterminer G dans le cas où $n = 2$ et où L est l'ensemble des couples (x_1, x_2) de E tels que $x_1 \in 2\mathbf{Z}$, $x_2 \in \mathbf{Z}$.

* *
*