Correction du DM n°3

1 Un exemple

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le système (R_n, L_n, M_n) est complet par la formule des probabilités totales on a donc :

$$\begin{aligned} r_{n+1}\mathbf{P}(R_{n+1}) =& \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}(R_{n+1}|R_n) + \mathbf{P}(L_n)\mathbf{P}(R_{n+1}|L_n) + \mathbf{P}(M_n)\mathbf{P}(R_{n+1}|M_n) \\ =& \mathbf{P}(R_n) \times 0 + \mathbf{P}(L_n) \times \frac{1}{2} + \mathbf{P}(M_n) \times \frac{1}{2}. \\ =& 0 \times r_n + \frac{1}{2}l_n + \times\frac{1}{2}m_n. \end{aligned} \tag{1}$$

De même

$$l_{n+1} = \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}l_n + \times\frac{1}{4}m_n.$$

$$m_{n+1} = \frac{3}{4}r_n + \frac{1}{4}l_n + \times\frac{1}{4}m_n.$$

Donc $\boxed{U_{n+1} = BU_n}$.

   (b) Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_n B^n U_0}$.

2. La somme des coefficients de chaque colonne de B vaut 1, donc 1 est valeurs propre de $B^\top$ associée au vecteur propre $(1,1,1)^\top$. Comme B et $B^\top$ partagent le même spectre : $\boxed{1 \in \mathrm{sp}(B)}$.

3. On a

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

le rang de cette matrice est au moins deux (sa sous-matrice d'ordre 2 en haut à gauche est inversible car de déterminant non nul), donc $\dim(\mathbf{E}_1(B))$ est au plus 1 et même 1 puisque un sous-espace propre ne saurait être nul,

$$\boxed{\dim(\mathbf{E}_1(B)) = 1}.$$

4. (a) On a $Bu^* = U_*$. Donc par 1.(b), et une récurrence insignifiante, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Donc <u>la probabilité que la voiture soit dans une des trois villes donnée est la même tous les jours.</u>

   (b) D'une part,

$$\mathbf{P}(S_0 = 1, S_1 = 1) = \mathbf{P}(S_0 = 1)\mathbf{P}(S_1 = 1|S_0 = 1) = r_0 \times 0 = 0.$$

D'autre part

$$\mathbf{P}(S_0 = 1)\mathbf{P}(S_1 = 1) = r_0 \times r_1 = r_0^2 = \left(\frac{4}{12}\right)^2 = \frac{1}{9} \neq 0.$$

Donc <u>les variables aléatoires S_1 et S_2 ne sont pas indépendantes.</u>

5. (a) Le rang de B n'est pas 3, car ses deux dernières colonnes sont identiques, donc 0 est valeur propre. L'examen de la trace de B, somme des valeurs propres, donne : $\boxed{\mathrm{sp}(B) = \left\{1, 0, \frac{1}{2}\right\}}$.

Comme B admet trois valeurs propres réelles distinctes, B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit V un vecteur propre associé à une valeur propre autre que 1, notée ν. En sommant les trois composantes de l'égalité $\mu V = MV$ on a :

$$\nu \sum_{i=1}^{3} v_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} m_{i,j} v_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} m_{i,j} \right) v_j = \sum_{j=1}^{3} 1 \times v_j = \sum_{j=1}^{3} v_j$$

comme $\nu \neq 1$, on a $\sum\limits_{j=1}^{3} v_j = 0$.

Donc l'espace propre de B associé à ν est inclus dans H.

6. (a) La famille (U_*, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, car ses trois éléments sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.

Décomposons U_0 dans cette base :

$$U_0 = \alpha U_* + \beta V + \gamma W$$

En sommant les trois composantes de cette égalité, on a grâce à 5. (b),

$$1 = \alpha \times 1 + \beta \times 0 + \gamma \times 0$$

Donc α, première coordonnée de U_0 dans cette base, vaut 1.

On a que P est la matrice de passage de la base canonique à la base (U_*, V, W).

Donc $B = PDP^{-1}$. Donc par 1. (b),

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = PD^n P^{-1} U_0}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce à 2, et en utilisant les notations de cette question,

$$PD^n P^{-1} U_0 = P \mathrm{diag}\left(1^n, 0, \frac{1}{2^n}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\gamma}{2^n} \end{pmatrix}$$

Donc par continuité du produit d'un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par P (polynomiale en les coordonnées du vecteur [1]) on a :

$$\boxed{U_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = U_*}$$

1. Bientôt on dira linéaire en dimension finie.

2 Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

7. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ et par récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout k. Ainsi, $r_k(x) = x$ et donc

$$\boxed{r_k(x) \to x}$$

8. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Il existe y tel que $x = (u - I_E)(y)$ et donc $x = u(y) - y$. Ainsi $u^l(x) = u^{l+1}(x) - u^l(x)$ et (télescopage)

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}(u^{l+1}(x) - u^l(x)) = \frac{1}{k}(u^k(x) - x).$$

On en déduit que $\|r_k(x)\| \leq \frac{1}{k}(\|u^k(x)\| + \|x\|)$. Or, u contractant les normes, $\|u^k(x)\| \leq \|x\|$ et donc notre majorant est de limite nulle. Donc par encadrement,

$$\boxed{r_k(x) \to 0_E}$$

9. Si $x \in \mathrm{Im}(u-I_E) \cap \mathrm{Ker}(u-I_E)$, alors $(r_k(x))$ est simultanément de limite x et 0_E et donc $x = 0_E$, par unicité de la limite. L'intersection est donc réduite à $\{0_E\}$ et la somme de $\mathrm{Im}(u - I_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - I_E)$ est directe. Donc, en utilisant la formule du rang par la formule du rang

$$\dim(\mathrm{Im}(u - I_E)) \oplus \mathrm{Ker}((u - I_E)) = \dim(\mathrm{Ker}(u - I_E)) + \dim(\mathrm{Im}(u - I_E)) = \dim(E).$$

Donc

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)}$$

10. Soit $x \in E$. Il existe $y \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(u - I_E)$ tels que $x = y + z$. On a alors $r^k(x) = r^k(y) + r^k(z) \to y$ lorsque k tend vers $+\infty$. Donc $x \mapsto y$ est la projection sur $\mathrm{Ker}(u - I_E)$ de direction $\mathrm{Im}(u - I_E)$.

$$\boxed{r_k(x) \to p(x) \text{ avec } p \text{ projection sur } \mathrm{Ker}(u - I_E) \text{ de direction } \mathrm{Im}(u - I_E)}$$

11. Les calculs menés ci-dessus, en identifiant matrices et endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés, montrent que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ R_k X \to PX,$$

où P est la matrice (dans la base canonique) de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$ (espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$). Appliquons ceci aux éléments E_j de la base canonique de $\mathbb{R}^n$: $\forall j \in \{1, ..., n\},\ R_k E_j \to PE_i$, lorsque k tend vers $+\infty$. Mais alors pour tout $j \in \{1, ..., n\}$ et tout $i \in \{1, ..., n\}$,

$$R_k[i,j] = E_i^{\mathrm{T}} R_k E_j \to E_i^{\mathrm{T}} P E_j = P[i,j],$$

par continuité de de la multiplication par E_j^{T}, linéaire en dimension finie. La convergence coordonnée par coordonnée dans la base canonique, donne que

$$\boxed{R_k \to P \text{ et } P^2 = P}$$

3 Matrices stochastiques

12. Posons $V = AU$. On a pour $i = 1, 2, ..., n$,

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{(4) équivaut à } AU = U}$$

13. Soient A, B stochastiques. Par les formules de produit, $C = AB$ est à coefficients positifs (chaque $c_{i,j}$ est somme et produit de termes ≥ 0). En outre $CU = ABU = AU = U$ avec la question précédente. Cette même question indique que C vérifie (4) et est donc stochastique.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est stable par multiplication}}$$

14. Soit (A_k) une suite convergente de matrices stochastiques et A sa limite. Chaque coefficient de A est limite de la suite correspondante des coefficients de A_k et est positif comme limite de tels termes. De plus, comme pour tout entier $k \geq 0$, $A_k U = U$, on a en laissant tendre k vers $= \infty$, $AU = U$, par continuité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $M \mapsto MU$ (linéaire en dimension finie). Ainsi A est-elle stochastique.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est fermé}}$$

Soient A, B stochastiques et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $M = \lambda A + (1-\lambda)B$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M. De plus $MU = \lambda AU + (1-\lambda)BU = \lambda U + (1-\lambda)U = U$ ce qui donne (4) pour M qui est donc stochastique.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est convexe}}$$

15. Posons $Y = AX = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a

$$|y_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|x\|_\infty.$$

$$\boxed{\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n}$$

16. Notons $B = A^p = (b_{i,j})$. B est une matrice stochastique (question 12) à coefficients > 0. Soit $X \in \text{Ker}(B - I_n)$ et s un indice tel que x_s est le maximum des x_i. On a $BX = X$ et, en regardant le coefficient d'indice s de cet élément de $\mathbb{R}^n$,

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j \leq x_s \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = x_s,$$

(on a utilisé la positivité des $b_{i,j}$ pour dire que $b_{i,j} x_j \leq b_{i,j} x_s$). Si, par l'absurde, il existait un j tel que $x_j < x_s$ alors, comme $b_{i,j} > 0$, on aurait $b_{i,j} x_j < b_{i,j} x_s$ et on obtiendrait ci-dessus $x_s < x_s$ et donc une contradiction. Ceci montre que les x_j sont tous égaux et donc que $X \in \text{Vect}(U)$. Ainsi $\text{Ker}(A^p - I_n) \subset \text{Vect}(U)$. Mais A^p est une matrice stochastique (question 12) et on a donc $U \in \text{Ker}(A - I_p)$. Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(A^p - I_n) = \text{Vect}(U) \text{ et donc } \dim(\text{Ker}(A^p - I_n)) = 1}$$

17. On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$ car A est stochastique. Si $AX = X$ alors par récurrence $A^k X = X$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en particulier $A^p X = X$. la question précédente montre que $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)}$$

18. Les A^l sont toutes stochastiques (question 12). R_k est donc à coefficients positifs comme somme de telles matrices. De plus

$$R_k U = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l U = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} U = U$$

et on a aussi (4). Finalement

$$\boxed{R_k \text{ est stochastique pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$$

On aurait aussi pu utiliser la convexité de $\mathcal{E}$ puisque R_k est isobarycentre de matrices stochastiques.

19. Les questions 10 et 14 montrent que (R_k) est convergente de limite P telle que $P^2 = P$. De plus, les questions 17 et 13 (caractère fermé) montrent que P est stochastique. La partie **2** a montré que P est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$. On a donc $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$ et P est de rang 1.

$$\boxed{R_k \to P,\ P \in \mathcal{E},\ \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)}$$

20. Toutes les colonnes de P sont ainsi multiples de U et la colonne i s'écrit $\lambda_i U$, où λ_i est un réel. En posant $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (matrice ligne) on a alors $P = UL$. Comme toutes les coordonnées de U valent 1, toutes les lignes de P valent L. Comme P est stochastique, L l'est aussi.

$$\boxed{P = UL \text{ avec } L \text{ matrice ligne stochastique}}$$

21. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$R_k A = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} A^l = \frac{1}{k}((k+1)R_{k+1} - I_n) = \frac{k+1}{k}R_{k+1} - \frac{1}{k}I_n.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{PA = P}$$

On aurait aussi pu dire que $\mathrm{Im}(A - I_n) = \mathrm{Ker}(P)$ *et que donc* $P(A - I_n) = 0$.
P est une matrice dont toutes les lignes sont égale à L. Ainsi PA est-elle une matrice dont toutes les lignes sont LA. L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$.
Si Y est une matrice ligne, alors $YA = A$ s'écrit aussi $A^\top Y^\top = Y^\top$ ou encore $(A^\top - I_n)Y^\top = 0$. Or, avec la question 16, $A - I_n$ est de rang $n-1$ (par théorème du rang) et il en est de même de $A^\top - I_n$. Le noyau de $A^\top - I_n$ est ainsi de dimension 1. Il contient la matrice ${}^tL$ qui est non nulle (car sinon $P = 0$). Ainsi, les matrices lignes Y vérifiant $YA = A$ sont les multiples de L. La somme des coefficients de λL ne valant 1 que si $\lambda = 1$, on a finalement

$$\boxed{L \text{ est la seule ligne stochastique telle que } LA = L}$$

22. On montre par récurrence simple que $LA^k = L$ pour tout k. En particulier, $LA^p = L$. Si, par l'absurde, on avait $\lambda_i = 0$, alors en regardant le i^{e} coefficient de $LA^p = L$, on aurait

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (A^p)_{j,i}.$$

Les $(A^p)_{j,i}$ étant > 0 et les λ_j positifs non tous nuls, ceci est impossible. On a montré que

$$\boxed{L \text{ est à coefficients strictement positifs}}$$

23. On sait que $\mathrm{Ker}(A-I_n)\oplus\mathrm{Im}(A-I_n)=\mathbb{R}^n$. Les espaces $F=\mathrm{Ker}(A-I_n)$ et $G=\mathrm{Im}(A-I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A. En notant $u_F\in\mathcal{L}(F)$ et $u_G\in\mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $F\oplus G=\mathbb{R}^n$,

$$\chi_u=\chi_{u_F}\chi_{u_G}\,;$$

F est de dimension 1 et $u_F=\mathrm{Id}_F$ donc $\chi_{u_F}=(X-1)$. Comme $F\cap G=\{0\}$, $u_G-\mathrm{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de χ_{u_G}. De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de χ_u, c'est à dire

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre simple de } A}$$

La somme des coefficients de la première colonne de B fait 1, c'est en effet la somme de $\mathbf{P}(R_+1|R_n)$,$\mathbf{P}(L_+1|R_n)$ et $\mathbf{P}(M_+1|R_n)$, soit $\mathbf{P}(\Omega|R_n)$. Il en est de même pour les autres colonnes.
Donc $B^\top$ est stochastique. On vérifie de plus que B^2 est à coefficients strictements positifs. Donc U^* est par 21, le seul vecteur colonne stochastique invariant par B.