indications pour DM n^{o}5

Ce devoir est constitué de deux exercices et d'un problème (deux parties d'un devoir du concours Mines-Ponts).

EXERCICE I

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que :

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) > 0.$$

1. Montrer qu'il existe un réel strictement positif b tel que f soit strictement décroissante sur le segment $[-b, 0]$, strictement croissante sur le segment $[0, b]$.
   Par continuitéde f'' en 0, (f est $\mathcal{C}^\infty$), on dispose d'un réel $b > 0$ tel que pour tout $t \in [-b, b]$, $|f''(t) - f''(0)| < a$ et donc $f''(t) > 0$....
2. Montrer qu'il existe un réel strictement positif η tel que pour tout élément λ de $]0, \eta]$, l'ḉquation d'inconnue réelle x,
   $$f(x) = \lambda$$
   admette une unique solution dans $[-b, 0]$ notée $x_1(\lambda)$ et une unique solution dans $[0, b]$ notée $x_2(\lambda)$.
   C'est une double application du théorème de la bijection croissante
3. Montrer que la quantité $\frac{x_1(\lambda)+x_2(\lambda)}{2\lambda}$ admet une limite à déterminer, lorsque λ tend vers 0 par valeurs strictement supérieures.
   D'abord le théorème de la bijection réciproque assure la continuitéde f_1^{-1} et f_2^{-1}, donc que pour $i = 1, 2$:
   $$x_i(\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   Ensuite la formule de Taylor Ã l'ordre deux donne, pour $i = 1, 2$:
   $$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{a}{2} x_i^2(\lambda) + \underset{\lambda \to 0}{\mathrm{o}} \left(x_i^2(\lambda) \right), \tag{1}$$
   et donc
   $$x_i^2(\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\sim} \frac{2\lambda}{a}.$$
   Enfin la formule de Taylor, Ã l'ordre trois donne, pour $i = 1, 2$:
   $$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{a}{2} x_i^2(\lambda) + \frac{g}{6} x_i^3(\lambda) + \underset{\lambda \to 0}{\mathrm{o}} \left(x_i^3(\lambda) \right),$$
   avec $g = f'''(0)$. Donc
   $$a \left(x_2^2(\lambda) - x_1^2(\lambda) \right) = \frac{-g}{3} \left(x_2^3(\lambda) - x_1^3(\lambda) \right) + \underset{\lambda \to 0}{\mathrm{o}} \left(x_1(\lambda)^3 \right) + \underset{\lambda \to 0}{\mathrm{o}} \left(x_2(\lambda)^3 \right).$$
   Par (1), d'une part
   $$\frac{-g}{3} \left(x_2^3(\lambda) - x_1^3(\lambda) \right) \underset{\lambda \to 0}{\sim} -\frac{2g}{3} \left(\frac{2\lambda}{a} \right)^{\frac{3}{2}},$$
   d'autre part
   $$a \left(x_2^2(\lambda) - x_1^2(\lambda) \right) \underset{\lambda \to 0}{\sim} 2a \sqrt{\frac{2\lambda}{a}} \left(x_2(\lambda) + x_1(\lambda) \right),$$
   la fin va de soi...

EXERCICE II

Développements asymptotiques

Pour tout entier $n \geq 3$, on note P_n le polynôme $X^n - nX + 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, P_n admet une et une seule racine dans $]0,1[$, notée x_n.
2. Donner un équivalent simple a_n de x_n lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$.
3. Donner un équivalent simple de $x_n - a_n$.

Remarquons qu'ainsi : $x_n = a_n + b_n + \mathrm{o}(b_n)$, lorsque $n \to +\infty$, avec $b_n = \mathrm{o}(a_n)$, (développement asymptotique à deux termes à la précision b_n).

PROBLÈME

Inégalité de Prékopa et Leindler

Partie I. Une inégalité de Prékopa et Leindler

1. Soient λ un réel dans l'intervalle $]0,1[$, et a et b deux réels positifs. Montrer que

$$\lambda a + (1-\lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda}.$$

On pourra introduire une certaine fonction auxiliaire dont on justifiera la concavité. Montrer en outre que pour tout réel $u > 1$,

$$(\lambda a + (1-\lambda)b)^u \leq \lambda a^u + (1-\lambda)b^u.$$

On commence par remarquer que le cas où a ou b est nul se traite immédiatement. Ensuite, on suppose que a et b sont strictement positifs et on écrit :

$$a^\lambda b^{1-\lambda} = \exp(\lambda \ln(a) + (1-\lambda)\ln(b)).$$

On utilise ensuite que la fonction exponentielle est convexe.
Pour la seconde inégalité, il suffit de justifier que la fonction $x \mapsto x^u$ une fois prolongée par continuité en 0, est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, puis qu'elle est convexe...

2. Soient a et b deux réels positifs et λ un réel dans $]0,1[$. Montrer que

$$(a+b)^\lambda \leq a^\lambda + b^\lambda.$$

On commence par traiter le cas $b = 0$. Ensuite, on fixe $b \in \mathbf{R}_+^*$ et on étudie les variations de la fonction $a \mapsto a^\lambda - (a+b)^\lambda$

Dans toute cette partie, λ est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$, et f, g, h sont des fonctions de $\mathcal{C}^0(R, \mathbb{R}_+)$ intégrables qui satisfont l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité suivante, à laquelle on fera référence par "inégalité de Prékopa et Leindler", ou en abrégé "P-L" :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}. \tag{1}$$

Dans les questions 3, 4 et 5 on supposera de plus que f et g sont strictement positives, c'est-à-dire pour tout réel x, $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$.

3. On pose $F = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$. Montrer que pour tout t dans l'intervalle $]0,1[$, il existe un unique réel noté $u(t)$ et un unique réel noté $v(t)$ tels que

$$\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)\mathrm{d}x = t, \quad \frac{1}{G}\int_{-\infty}^{v(t)} g(x)\mathrm{d}x = t.$$

   On pourra étudier les variations de la fonction $f_1 \; : \; u \mapsto \frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u} f(x)\mathrm{d}x$.
   La fonction f_1 est donc une primitive de la fonction f/F. À ce titre, la fonction f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est strictement positive, on voit venir le théorème de la bijection croissante !

4. Montrer que les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,1[$ et, calculer pour chaque $t \in]0,1[$ les nombres dérivés $u'(t)$ et $v'(t)$.
   application directe du théorème du $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On a par $u' = \frac{F}{f \circ u}$.

5. Montrer que l'ensemble image de l'application w définie sur $]0,1[$ par

$$\forall t \in]0,1[, \quad w(t) = \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t)$$

   est égal à $\mathbb{R}$, puis prouver que w définit un changement de variable de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant ce dernier et $\int_{-\infty}^{+\infty} h(w)\mathrm{d}w$, montrer que f, g et h satisfont l'inégalité "P-L" (1).
   Il faut montrer que w est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$

On pose $\Psi(u) = \exp(-u^2)$ pour tout réel u.

A partir de maintenant, on suppose que les fonctions f, g et h sont seulement à valeurs positives ou nulles.

6. Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda}.$$

   Convexité de $x \mapsto x^2$.

Soit M un réel strictement positif. On suppose dans les questions 7, 8 et 9 que f et g sont nulles en dehors de l'intervalle $[-M, M]$. On pose $\Lambda = \min(\lambda, 1-\lambda)$, $\Theta = \max(\lambda, 1-\lambda)$ et $\widehat{M} = M\max(\lambda, 1-\lambda)$. Pour chaque réel u, on pose :

$$\Psi_M(u) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\Theta^2}\left(|u| - \widehat{M}\right)^2\right), & \text{si } |u| > \widehat{M}, \\ 1, & \text{si } |u| \leq \widehat{M}. \end{cases}$$

7. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. Prouver que si $|y| \leq M$, alors $\Psi(x) \leq \Psi_M(z)$. De même, prouver que si $|x| \leq M$ alors $\Psi(y) \leq \Psi_M(z)$.
   Si $|z| \leq \hat{M}$, alors l'inégalité $\psi(x) \leq \psi_M(z)$est facile.
   Cas $|z| > \hat{M}$.
   L'inágalité triangulaire donne

$$|z| \leq |x| + (1-)|y|$$

   puis l'hypothèse $|y| \leq M$ donne $0 < |z| - M \leq |x|$. On en déduit la majoration

$$(|z|\hat{M})^2 \leq \lambda^2 x^2 \leq \Theta^2 x^2$$

   puis la première inégalité...
   Même principe pour la seconde

8. Soit $\varepsilon \in]0,1[$, $f_\varepsilon = f + \varepsilon\Psi$ et $g_\varepsilon = g + \varepsilon\Psi$. Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f_\varepsilon(x)^\lambda g_\varepsilon(y)^{1-\lambda} \le h(z) + \varepsilon^\Lambda(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda})(\Psi_M(z))^\Lambda + \varepsilon\Psi(z),$$

où $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On commencera par appliquer l'inégalité de la question 2, puis les deux questions précédentes. On rappelle que $f(x) = 0$ si $|x| > M$ et que $g(y) = 0$ si $|y| > M$.

Prenons x et y dans $\mathbf{R}$ et appliquons, comme on nous y invite, l'inégalité de la question 2 :

$$0 \le (f_\varepsilon(x))^\lambda = (f(x)+\varepsilon\psi(x))^\lambda \le f(x)^\lambda+\varepsilon^\lambda\psi(x)^\lambda \,;0 \le (g_\varepsilon(x))^{1-\lambda} \le g(y)^{1-\lambda}+\varepsilon^{1-\lambda}\psi(y)^{1-\lambda}.$$

Reste à multiplier ces inégalitées entre nombres positifs ...

9. En déduire que si f et g sont nulles en dehors d'un intervalle borné alors l'inégalité "P-L" est satisfaite.

Question 9. Avec les notation de Q8 et Q7, on introduit de plus la fonction h_ε, de R dans R,

$$h_\varepsilon \;:\; t \mapsto h(t) + \varepsilon^\Lambda(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda})\Psi_M(t)^\Lambda + \varepsilon\Psi(t).$$

On vient alors de voir :

$$f_\varepsilon^\lambda(x) g_\varepsilon^{1-\lambda}(y) \le h_\varepsilon(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

On montre que fonctions f_ε, g_ε , h_ε sont strictement positives intégrables et on applique appliquer l'inégalité de la question 5.

On peut maintenant remarquer que la fonction $f \le f_\varepsilon$, $g \le g_\varepsilon$, et finir en laissant tendre ε vers 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $\chi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction *continue* qui vaut 1 sur $[-n, n]$, qui vaut 0 sur $]-\infty, -n-1] \cup [n+1, +\infty[$ et qui est affine sur chacun des deux intervalles $[-n-1, -n]$ et $[n, n+1]$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leq \chi_{n+1}(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

11. Montrer que l'inégalité "P-L" (1) est satisfaite (si on choisit d'utiliser le théorème de convergence dominée alors on vérifiera soigneusement que ses conditions de validité sont remplies).

La majoration $_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} \leq 1$
est suffisante :

$$f_n(x)^\lambda g_n(y)^{1-\lambda} \leq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \leq h(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

On remarque de plus que les fonctions f_n *et* g_n *sont continues et nulles en dehors d'un segment, donc intrables sur* $\mathbf{R}$*. On peut donc appliquer P-L de la question 9 au triplet* (f_n, g_n, h) *:*
Remarquer ensuite que la fonction f_n *coincide avec* f *sur* $[n, n]$ *et qu'elle est positive en dehors de ce segment. reste à faire tendre tendre n vers* $+\infty$*, on obtient finalement l'inégalité de Prékopa et Leindler est donc démontréee en toute généralité pour les fonctions continues et positives sur* $\mathbf{R}$*.*

Partie II. Fonctions log-concaves

Soit n un entier strictement positif. On dira qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ est log-concave si pour tout λ dans l'intervalle $]0, 1[$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}.$$

12. Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Prouver alors que l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \exp\left(-N(x)^2\right)$$

est continue et log-concave sur $\mathbb{R}^n$. On pourra observer que la fonction $u \mapsto u^2$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.