Correction du DM n^{o}4

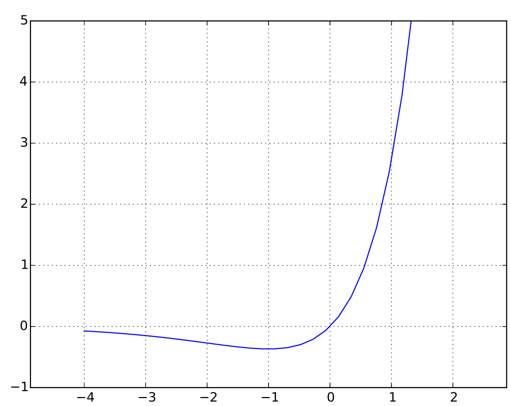
Les fonctions de Lambert

I. Fonction de Lambert

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (1+x)e^x$. On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est alors *continue* et *strictement croissante* de *l'intervalle* $[-1,+\infty[$. Appliquons le théorème de la bijection monotone : f réalise une alors bijection de $[-1,+\infty[$ sur $f([-1,+\infty[)$ qui vaut $[f(-1), \lim\limits_{+\infty} f[$ soit encore $[-e^{-1},+\infty[$.



2. Le théorème de la bijection monotone implique aussi que la fonction réciproque $\boxed{W \text{ est continue sur } [-e^{-1},+\infty[}$.
De plus, comme f' ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$ et que f est de classe C^∞, on sait que $\boxed{\text{la restriction de } W \text{ à }]-e^{-1},+\infty[\text{ est de classe } C^\infty}$.

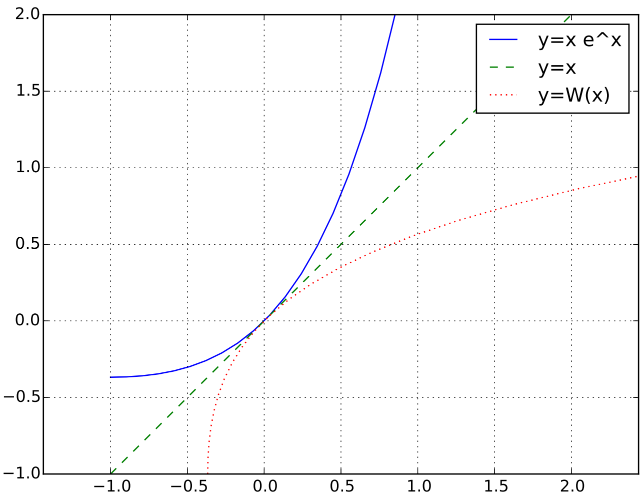
3. Comme $f(0) = 0$, $\boxed{W(0) = 0}$.

   De plus, $\boxed{W'(0) = \dfrac{1}{f'(W(0))} = 1}$.

4. Comme W est dérivable en 0, il admet pour développement limité à l'ordre 1 en 0 :
$W(x) = W(0) + xW'(0) + o(x) = x + o(x)$ donc $\boxed{W(x) \sim x \text{ en } 0}$.

   Par définition de W, $W(x)e^{W(x)} = x$ donc $\ln W(x) + W(x) = \ln x$. Or $\ln u$ est négligeable devant u en $+\infty$. Comme $W(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $\ln W(x) = o(W(x))$ et donc $\boxed{W(x) \sim \ln x \text{ en } +\infty}$.

5. Voici les 2 courbes :



La tangente à la courbe représentant f en $x=0$ a pour équation
$y=f'(0)(x-0)+f(0)=x$: c'est la première bissectrice et par symétrie, c'est aussi la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentant W.
Au point d'abscisse $-e^{-1}$, la courbe représentant W a une tangente verticale car $f'(-1)=0$.

6. L'application $x\mapsto x^\alpha W(x)$ est continue et positive sur $]0,1]$.

De plus $x^\alpha W(x)\sim \dfrac{1}{x^{-1-\alpha}}$ en 0. Cette intégrale de Riemann est convergente sur $]0,1]$si et seulement si $-1-\alpha<1$ soit si et seulement si $-2<\alpha$. Par comparaison de fonctions positives, $x\mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\boxed{-2<\alpha}$.

L'application $h: x\mapsto x^\alpha W(x)$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

De plus $x^\alpha W(x)\sim \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}$ en $+\infty$.

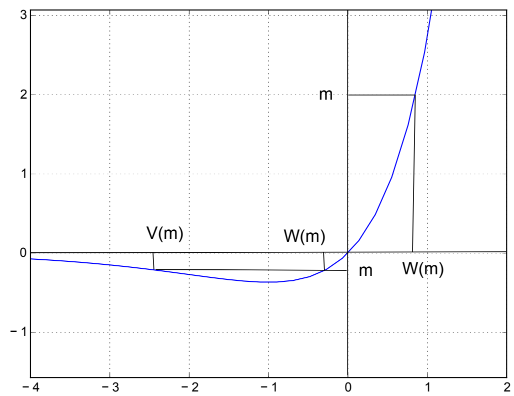
Etudions l'intégrabilité de $x\mapsto \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}$ sur $[1,+\infty[$:

- Si $-\alpha\le 1$, et si $x\ge e$, comme $\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}\ge \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ et que $x\mapsto \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, on en déduit par comparaison des fonctions positives que h n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Si $-\alpha>1$, posons $k=\dfrac{1-\alpha}{2}>1$. Alors $x^k\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}=x^{\frac{1+\alpha}{2}}\ln x\longrightarrow 0$ par croissance comparée en $+\infty$. On en déduit $\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}=o\left(\dfrac{1}{x^k}\right)$ avec $k>1$. Par comparaison des fonctions positives, on obtient l'intégrabilité de h sur $[1,+\infty[$.

On en déduit que $h: x\mapsto x^\alpha W(x)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\boxed{\alpha<-1}$.

8. Comme dans Q.1, la fonction f est continue et strictement décroissante de l'intervalle $]-\infty,-1]$. Comme $f(]-\infty,-1])=[-e^{-1},0[$, f réalise une bijection entre ces 2 ensembles (théorème de la bijection monotone).
9. A l'aide du tableau de variation de f, on étudie l'équation $f(x)=m$. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions :
— si $m<-e^{-1}$, alors $\mathcal{S}=\emptyset$;
— si $m=-e^{-1}$, alors $\mathcal{S}=\{-1\}=\{V(-e^{-1})\}=\{W(-e^{-1})\}$, singleton ;
— si $-e^{-1}<m<0$, alors $\mathcal{S}=\{V(m),W(m)\}$ de cardinal 2 ;
— si $m\ge 0$, alors $\mathcal{S}=\{W(m)\}$, singleton.
10. Toujours à l'aide du tableau de variation, en notant $\widetilde{\mathcal{S}}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\le m$:
— si $m<-e^{-1}$, alors $\widetilde{\mathcal{S}}=\emptyset$;
— si $m=-e^{-1}$, alors $\widetilde{\mathcal{S}}=\{-1\}$;
— si $-e^{-1}<m<0$, alors $\mathcal{S}=[V(m),W(m)]$, segment ;

— si $m \geq 0$, alors $\mathcal{S} =]-\infty, W(m)]$, demi-droite.



11. Soit a et b deux réels non nuls. L'équation $e^{ax} + bx = 0$ équivaut à $f(-ax) = \dfrac{a}{b}$. Notons $\widehat{\mathcal{S}}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation
Avec Q9, on en déduit alors :

- Si $\dfrac{a}{b} < -e^{-1}$, $\widehat{\mathcal{S}} = \emptyset$
- Si $\dfrac{a}{b} = -e^{-1}$, $\widehat{\mathcal{S}} = \{\dfrac{1}{a}\}$
- Si $-e^{-1} < \dfrac{a}{b} < 0$, $\widehat{\mathcal{S}} = \{-\dfrac{1}{a}V(\dfrac{a}{b}), -\dfrac{1}{a}W(\dfrac{a}{b})\}$
- Si $\dfrac{a}{b} \geq 0$, $\widehat{\mathcal{S}} = \{-\dfrac{1}{a}W(\dfrac{a}{b})\}$.

II. Probabilité

12. $X(\Omega) = \{0, ...r\}$ et comme chaque bit a une probabilité de changer de $1-p$ indépendamment des autres, on reconnait une loi binomiale de paramètre $1-p$ et d'ordre r donc
$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(r, 1-p),\ \mathbb{E}(X) = r(1-p) \text{ et } \mathbb{V}(X) = rp(1-p)}$.
13. La variable aléatoire X est positive d'espérance finie : on peut appliquer l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{r(1-p)}{2}.$$

Si $r \leq 2\dfrac{1-\alpha}{1-p}$, alors on a immédiatement $\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1-\alpha}$.
14. Pa passage à l'événement contraire,

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) = 1 - p^r - r(1-p)p^{r-1} = .$$

Donc $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1-\alpha$ si et seulement si $-p^r - r(1-p)p^{r-1} \leq -\alpha$.
$-\alpha \geq -p^r - r(1-p)p^{r-1} = (1-p)p^{r-1}(\dfrac{p}{p-1} - r) = \dfrac{(1-p)p^{r-1}}{\ln p}(\dfrac{p\ln p}{p-1} - r\ln p)xp^r\dfrac{1}{a}$ Or $e^x = p^r e^{-a}$,
donc $\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1-\alpha$ si et seulement si $\boxed{xe^x \leq -\alpha a e^{-a}}$.
15. L'expression $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - p^r - rp^{r-1}q$ trouvée à la question 14 tend vers 1 quand r tend vers l'infini et vaut 0 pour $r = 1$ (ce qui est conforme à la signification de X), donc le nombre de valeurs de r acceptables est fini et non nul. Il en existe donc une valeur maximale, sans que l'on ait besoin de faire appel aux fonctions V et W.
Pour répondre à la question suivante, on va appliquer la question 10, et donc évaluer

$$-\alpha a \exp^{-a} = \alpha f(-a) = \alpha f\left(\frac{p\ln p}{1-p}\right).$$

Il est clair que $-a < 0$, d'où $f(-a) \in \big[-\exp^{-1}, 0 \big[$ et en posant $m = \alpha f(-a)$, on a $m \in \big] -e^{-1}, 0\big[$. D'après la question 10, en tenant compte dans l'inégalité du fait que $\ln p < 0$, $f(r\ln p - a) \leq m$ si et seulement si $V(m) \leq r\ln p - a \leq W(m)$ soit si et seulemet si

$$\frac{W(m)+a}{\ln p} \leq r \leq \frac{V(m)+a}{\ln p}.$$

16. L'*intervalle admissible* $\left[\dfrac{W(m)+a}{\ln p}, \dfrac{V(m)+a}{\ln p}\right]$ contient l'entier 1 comme on l'a vu à la question pécédente.

Le plus grand entier naturel non nul satisfaisant la condition (II.2) est donc $r = \left\lfloor \dfrac{V(m)+a}{\ln p} \right\rfloor$.