Correction du DM n°4

EXERCICE

1. Posons $g = f \circ \exp(\mathrm{i}\,\cdot)$. Notons $c = \ln(|f(1)|) + \alpha$ où α est un argument de $f(1)$ ($|f(1)| > 0$) ; ainsi $f(1) = \exp(c)0$. Posons [1] enfin
$$\theta\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \exp\left(c + \int_0^t \frac{g'}{g}\right),$$
définie car g ne s'annule pas. Par le théorème fondamental de l'analyse θ est de classe $\mathcal{C}^1$ ($\frac{g'}{g}$ est continue) et
$$(\exp(-\theta)g)' = \exp(-\theta)\left(-\frac{g'}{g}\right)g + \exp(-\theta)g' = 0.$$
Donc $\exp(-\theta)g$ est constante, mais $(\exp(-\theta)g)(1) = \exp(-c)f(1) = 1$ donc :
$$\underline{f(\exp(\mathrm{i}\,\cdot) = g = \exp(\theta).}$$

2. Soit θ_1 et θ_2 des relèvements de f. D'une part, par définition d'un relèvement pour tout réel t,
$$\exp\left((\theta_1 - \theta_2)(t)\right) = 1$$
Donc $\theta_1 - \theta_2$ est à valeur dans $\mathrm{i}2\pi\mathbf{Z}$.
Mais par ailleurs la continuité de $\theta_1 - \theta_2$ veut que $(\theta_1 - \theta_2)(\mathbf{R})$ soit un intervalle.
Donc au total $\theta_1 - \theta_2$ prend une seule valeur de la forme $k\mathrm{i}2\pi$, avec $k \in \mathbf{Z}$.
Remarque. *Une analyse dans la question 1 montre aussi ce résultat*

3. Par la question 2, $\dfrac{\theta(t+2\pi) - \theta(t)}{i2\pi}$est indépendant du choix du relèvement θ.
Par 2π périodicité de g, $\exp(\theta(t+2\pi) - \theta(t)) = \dfrac{g(t+2\pi)}{g(t)} = 1$, donc
$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \theta(t+2\pi) - \theta(t)$$
est à valeur dans $\mathrm{i}2\pi\mathbf{Z}$, mais cette fonction est continue et comme dans 2, le théorème de la valeur intermédiaire assure sa constance de valeur $q\mathrm{i}2\pi$, où $q \in \mathbf{Z}$. Ainsi pour tout réel t :
$$\frac{\theta(t+2\pi) - \theta(t)}{\mathrm{i}2\pi} = q.$$

4. Déterminer $\mathrm{Ind}(f)$ dans les cas suivants :
   (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $f(\exp(\mathrm{i}t) = \exp(\mathrm{i}nt)$, donc un relèvement de f est $\mathrm{i}n\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, et donc
   $$\mathrm{Ind(f)} = \frac{\mathrm{i}n(0+2\pi) - \mathrm{i}n \times 0}{\mathrm{i}2\pi} = n.$$
   (b) Soient θ_i un relèvement de f_i, ôur $i = 1, 2$.
   $$(f_1 f_2)(\exp(\mathrm{i}\,\cdot) = \exp(\theta_1)\exp(\theta_2) = \exp(\theta_1 + \theta_2).$$
   Donc $\theta_1 + \theta_2$ est un relèvement de $f_1 f_2$. Il en résulte immédiatement que :
   $$\mathrm{Ind}(f_1 f_2) = \mathrm{Ind}(f_1)\mathrm{Ind}(f_2).$$
   (c) Notons L la détermination principal du logarithme, voir cours de calcul différentiel. Par définition de L, l'application $L \circ g$ est un relèvement de f. Alors par périodicité de g,
   $$\mathrm{Ind(f)} = \frac{L(g(2\pi)) - L(g(0))}{\mathrm{i}2\pi} = 0.$$

1. Le choix de cette fonction est dictée par une rapide analyse au brouillon en dérivant l'égalité souhaitée.

5. On
$$\left|1-\frac{f_2}{f_1}\right|<1,$$
donc $\frac{f_2}{f_1}$ est à valeurs dans $\{z|Re(z)>0\}$, donc *a fortiori* dans $\mathbf{C}-\mathbf{R}_-$. Donc par la question précédente $\mathrm{Ind}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)=0.$

Remarque. *Ici la détermination principale du logarithme sur* $\{z|Re(z)>0\}$ *est très simple c'est* $z\mapsto \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$.

Maintenant par le point (b)
$$\mathrm{Ind}(f_2)=\mathrm{Ind}\left(\frac{f_2}{f_1}f_1\right)=\mathrm{Ind}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)+\mathrm{Ind}\left(f_1\right)=0+\mathrm{Ind}\left(f_1\right)=\mathrm{Ind}\left(f_1\right).$$

6. Soit $f_0\in E$. Par compacité de U et continuité de $|f|$ (ou par périodicité de $|g|$ et continuité) f admet un minimum, noté η celui-ci est strictement positif car f ne s'annule pas.

   Par la question précédente, Ind est constant sur la boule de centre f_0 et de rayon η. Donc l'indice , constant au voisinage de f_0 est continu en f_0

   Conclusion :Ind est continue.

7. • Soit K une composante connexe. La continuité de l'indice impose que l'indice qui est à valeurs entière (question 3) soit constant sur C. Donc K est inclus pour un certain n dans I_n, ensemble des éléments de $\mathbf{E}$ d'indice n.

   • Réciproquement soit n un entier. L'ensemble I_n est non vide par 4. (a). Montrons que I_n est connexe par arcs.

   Soit $f_n\in I_n$ et désignons par θ un de ses relèvement. Posons alors
$$\Phi\ :\ [0,1]\to\mathbf{C}^U\ ;\ \lambda\mapsto\exp(\lambda\mathrm{i}n\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}}+(1-\lambda)\theta)$$
   L'application Φ est à valeurs dans $\{f(\exp(\mathrm{i}\cdot),f\in\mathbf{E}\}$, est continue et vérifie $\Phi(0)=f_n(\exp(\mathrm{i}\cdot)$, $\Phi(1)=\exp(\mathrm{i}n\cdot)$. Donc il existe un chemin de l'élément de I_n associé à X^n vers f_n de support dans $\mathbf{E}$. Il est alors immédiat que le point du chemin de paramètre λ a pour relèvement $\lambda\mathrm{i}n\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}}+(1-\lambda)\theta$ et donc comme indice n. Donc tout élément de I_n est reliable à la fonction de $\mathbf{E}$ associée à X^n, donc I_n est connexe par arcs.

   De ces deux points vient que l'ensemble des composantes connexes de $\mathbf{E}$ est $\{I_n,n\in\mathbf{Z}\}$