Correction du DM n°5

Ce devoir est constitué de deux exercices et d'un problème (deux parties d'un devoir du concours Mines-Ponts).

EXERCICE I

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que :

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f''(0) > 0.$$

1. *Montrer qu'il existe un réel strictement positif b tel que f soit strictement décroissante sur le segment $[-b, 0]$, strictement croissante sur le segment $[0, b]$.*

   REP. Notons $a := f''(0)$. Par continuité de f'' en 0, (f est $\mathcal{C}^\infty$), on dispose d'un réel $b > 0$ tel que pour tout $t \in [-b, b]$, $|f''(t) - f''(0)| < a$ et donc $f''(t) > 0$.

   Donc f' croît strictement sur $[-b, b]$ et donc puisque $f'(0) = 0$, on : f' strictement négative sur $[-b, 0[$ et strictement positive sur $]0, b]$. Finalement, par continuité de f, f est strictement décroissante sur le segment $[-b, 0]$, strictement croissante sur le segment $[0, b]$.
2. Comme f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, b]$, elle réalise une bijection f_2 de $[0, b]$ sur $[0, f(b)]$. De même f réalise-t-elle une bijection f_1 de $[-b, 0]$ sur $[0, f(-b)]$. Posons $\eta = \min\{f(-b), f(b)\}$. On a η strictement positif et pour pour tout élément λ de $]0, \eta]$, l'équation d'inconnue réelle x,

   $$f(x) = \lambda$$

   admette une unique solution $x_1(\lambda)$ dans $[-b, 0]$, et une unique solution $x_2(\lambda)$ dans $[0, b]$, (en fait $x_1(\lambda) = f_1^{-1}(\lambda)$ et $x_2(\lambda) = f_2^{-1}(\lambda)$).
3. *Montrer qu'il existe un réel strictement positif η tel que pour tout élément λ de $]0, \eta]$, l'quation d'inconnue réelle x,*

   $$f(x) = \lambda$$

   admette une unique solution dans $[-b, 0]$ notée $x_1(\lambda)$ et une unique solution dans $[0, b]$ notée $x_2(\lambda)$.

   REP. Comme f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, b]$, elle réalise une bijection f_2 de $[0, b]$ sur $[0, f(b)]$. De même f réalise-t-elle une bijection f_1 de $[-b, 0]$ sur $[0, f(-b)]$. Posons $\eta = \min\{f(-b), f(b)\}$. On a η strictement positif et pour pour tout élément λ de $]0, \eta]$, l'équation d'inconnue réelle x,

   $$f(x) = \lambda$$

   admette une unique solution $x_1(\lambda)$ dans $[-b, 0]$, et une unique solution $x_2(\lambda)$ dans $[0, b]$, (en fait $x_1(\lambda) = f_1^{-1}(\lambda)$ et $x_2(\lambda) = f_2^{-1}(\lambda)$).
4. *Montrer que la quantité $\frac{x_1(\lambda)+x_2(\lambda)}{2\lambda}$ admet une limite à déterminer, lorsque λ tend vers 0 par valeurs strictement supérieures.*

   REP. D'abord le théorème de la bijection réciproque assure la continuité de f_1^{-1} et f_2^{-1}, donc que pour $i = 1, 2$:

   $$x_i(\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ensuite la formule de Taylor à l'ordre deux donne, pour $i = 1, 2$:

$$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{a}{2} x_i^2(\lambda) + \underset{\lambda \to 0}{\mathrm{o}} \left(x_i^2(\lambda)\right), \tag{1}$$

et donc

$$x_i^2(\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\sim} \frac{2\lambda}{a}.$$

Enfin la formule de Taylor, à l'ordre trois donne, pour $i = 1, 2$:

$$\lambda = f(x_i(\lambda)) = \frac{a}{2} x_i^2(\lambda) + \frac{g}{6} x_i^3(\lambda) + \underset{\lambda \to 0}{\mathrm{o}} \left(x_i^3(\lambda)\right),$$

avec $g = f'''(0)$. Donc, en supposant $g \neq 0$, il vient :

$$a\left(x_2^2(\lambda) - x_1^2(\lambda)\right) = \frac{-g}{3}\left(x_2^3(\lambda) - x_1^3(\lambda)\right) + \underset{\lambda \to 0}{\mathrm{o}} \left(x_1(\lambda)^3\right) + \underset{\lambda \to 0}{\mathrm{o}} \left(x_2(\lambda)^3\right).$$

Par (1), d'une part

$$\frac{-g}{3}\left(x_2^3(\lambda) - x_1^3(\lambda)\right) \underset{\lambda \to 0}{\sim} -\frac{2g}{3}\left(\frac{2\lambda}{a}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d'autre part

$$a\left(x_2^2(\lambda) - x_1^2(\lambda)\right) \underset{\lambda \to 0}{\sim} 2a\sqrt{\frac{2\lambda}{a}}\left(x_2(\lambda) + x_1(\lambda)\right),$$

si bien que :

$$\left(x_2(\lambda) + x_1(\lambda)\right) \underset{\lambda \to 0}{\sim} -\frac{2\lambda g}{3a^2}.$$

Donc pour finir :

$$\frac{x_2(\lambda) + x_1(\lambda)}{2\lambda} \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} -\frac{g}{3a^2}.$$

EXERCICE II

Développements asymptotiques

Pour tout entier $n \geq 3$, on note P_n le polynôme $X^n - nX + 1$.

1. *Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, P_n admet une et une seule racine dans $]0, 1[$, notée x_n.*
   Rep. Pour tout entier $n \geq 3$ l'application polynomiale P_n est *continue* sur l'*l'intervalle* $]0, 1[$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$, en effet $P_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$, pour tout réel $x \in]0, 1[$; donc p_n réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $P_n(]0, 1[)$ qui est l'intervalle $]P_n(1), P_n(0)[$. Or $P_n(0) = 1 > 0$ et $P_n(1) = 2 - n < 0$. Donc, pour tout entier $n \geq 3$, la fonction P_n s'annule en un et un seule point de $]0, 1[$, noté x_n.
2. *Donner un équivalent simple a_n de x_n lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$.*
   Rep. On a :
   $$0 \leq \frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{x_n^{n-1}}{n} \leq \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0.$$
   Donc ${x_n}^n = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}} (nx_n)$ et donc $1 = {x_n}^n - nx_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -nx_n$. Donc :
   $$\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}}$$

3. *Donner un équivalent simple de $x_n - a_n$.*
Pour tout entier $n \geq 3$, posons $b_n = x_n - a_n$. Alors

$$\left(\frac{1}{n} + b_n\right)^n + -n\left(\frac{1}{n} + b_n\right) + 1 = 0,$$

donc

$$b_n = \left(\frac{1}{n} + b_n\right)^n = \left(\frac{1}{n}\right)^n (1+nb_n)^n = \left(\frac{1}{n}\right)^n \exp(n\ln(1+nb_n)) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \exp\left(n^2 b_n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(n^2 b_n\right)\right)$$

car $b_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour pouvoir conlure remarquons que $b_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, en effet, pour n suffisamment grand $b_n \leq \frac{1}{n}$, et donc

$$b_n = \left(\frac{1}{n} + b_n\right)^n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n = 2^2\left(\frac{2}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n^2} = 4\exp\left(\ln\left(\frac{2}{n}\right)(n-1)\right)\frac{1}{n^2} = o(1)\frac{1}{n^2}\ (n \to +\infty).$$

Reprenons

$$b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n \exp(o(1)) = \left(\frac{1}{n}\right)^n (1 + o(1))\,;(n \to +\infty)..$$

Donc $\boxed{b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{n}\right)^n}$

Remarquons qu'ainsi : $x_n = a_n + b_n + \mathrm{o}(b_n)$, lorsque $n \to +\infty$, avec $b_n = \mathrm{o}(a_n)$, (développement asymptotique à deux termes à la précision b_n).