DM n$^{\text{o}}$6

Ce cours DM est là pour attendre que soit traité le cours de calcul différentiel. Parties à traiter : Exercice 1 et au choix Exercice 2 ou 2 bis (plus long et plus dur).

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout entier naturel n, $P_n := \prod\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Nous dirons que le produit infini associé, noté $\prod a_n$ converge si la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite *non nulle*.

1. Montrer que si $\prod a_n$ converge alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

   On suppose dans la suite cette condition réalisée.

   Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 1$ et l'on suppose que $u_n \neq -1$.
2. Montrer qu il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geq n_0$, la quantité $\ln(1+u_n)$ soit définie. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge.
3. On suppose en outre, dans cette question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. Montrer que le produit $\prod a_n$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.
4. On ne suppose plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ positive à partir d'un certain rang, mais que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $\prod a_n$ converge si et seulemement si la série $\sum u_n^2$ converge.

La fin de cet exercice est facultative.

5. Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par p_n le n^{e} nombre premier. On se propose démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{p_n}$ diverge [1].
   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{p_n}$ et le produit $\prod\limits_{n\geq 1} \left(1 - \dfrac{1}{p_n}\right)$ sont de même nature.
   (b) Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Exprimer $\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)}$ au moyen d'un produit de sommes de séries.
   (c) Conclure.

Exercice 2

Nous considèrerons la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ nous noterons, S sa somme, et pour tout entier n, strictement positif, R_n le reste d'ordre n et S_n la somme partielle d'ordre n.

1. En comparant la série et une intégrale donner l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2\,(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}$$

1. Cela signifie qu'il y a pas mal de nombres premiers !A titre de comparaison, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{2^n}$ converge.

2. Posons pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_n = S_n + \frac{1}{2\,(n+1)^2}.$$

Pour quelle valeurs de l'entier n a-t-on :

$$|S - x_n| \leq 10^{-6}$$

3. Nous nous proposons de trouver une suite qui converge plus vite vers S que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4. (a) Montrer que les relations suivantes définissent une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes à coefficients rationnels :

$$P_0 = 1; \tag{1}$$
$$P_n'(X) = P_{n-1}(X)\,, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*; \tag{2}$$
$$\int_0^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}^*. \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Expliciter les polynômes P_1, P_2 et P_3. Montrer que $P_3(\frac{1}{2}) = 0$, en déduire que pour tout réel x élément de $[0,1]$,

$$|P_3(x)| \leq \frac{1}{24}.$$

(b) Soit f une application numérique, définie sur $[0,1]$, de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) - \tfrac{1}{12}\left(f'(1) - f'(0)\right) - \int_0^1 P_3(x) f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. En appliquant la formule précédente à l'application $f \;:\; [0,1] \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \frac{1}{(k+x)^3}$, pour tout entier k supérieur ou égal à n, montrer que :

$$R_n = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Plus précisément, montrer que :

$$\left| S - \left(S_n + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4}\right)\right| \leq \frac{1}{2n^5}.$$

Donner une valeur approchée de S à 10^{-6} près.

.

Exercice 2 bis

1. — Polynômes de Bernoulli —

(a) Montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui satisfait aux conditions suivantes

i. $P_0 = 1$;

ii. Pour tout entier $n \geq 1$, $P_n' = nP_{n-1}$;

ii. Pour tout entier $n \geq 1$, $\int_0^1 P_n{=}0$.

Dans la suite on pose pour tout entier naturel : $B_n = P_n(0)$.

Terminologie : P_n *est le* n^{e} *polynôme de Bernoulli et* B_n *le* n^{e} *nombre de Bernoulli.*

(b) Montrer pour tout entier naturel n, que : $P_n \in \mathbf{Q}[X]$ et $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_{n-k} X^k$.

Explicitez P_1, P_2 et P_3.

(c) Etablir, pour tout entier naturel n les égalités suivantes.

i. $P_n(X) = (-1)^n P_n(1-X)$;

ii. $P_n(X) = 2^{n-1} \left(P_n\left(\frac{X}{2}\right) + P_n\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$;

iii. $P_n(X+1) - P_n(X) = nX^{n-1}$.

2. — Etude des nombres de Bernoulli —

(a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $B_{2k+1} = 0$.

(b) En utilisant **1. (b)**, montrer que pour tout entier $p \geq 1$, on peut trouver un système linéaire triangulaire à p lignes dont $(B_0, B_2, \ldots, B_{2p})$ est la solutions.

Déterminer $B_0, B_1, \ldots, B_6$.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel k,

— P_{2k+2} admet dans $[0,1]$ exactement deux racines éléments de $]0,1[$;

— P_{2k+1} admet dans $[0,1]$ exactement trois racines qui sont 0, $\frac{1}{2}$, 1.

(b) Déduire de la question précédente que pour tout entier k, le maximum de $|P_{2k}|$ sur $[0,1]$ est égal à $|B_2 k|$ et celui de $|P_{2k+1}|$ est inférieur à $\frac{(2k+1)|B_2 k|}{2}$.

4. — Formule d'Euler-Mac Laurin — Soit f un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([0,1], \mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

(a) Donner pour f la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre $2p$, et rappeler sa démonstration.

(b) Montrer que :

$$\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = \frac{f(1) + f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{2k!} \left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0) \right) - I_{2p+1},$$

avec : $I_{2p+1} = \int_0^1 f^{2p+1}(x) P_{2p+1}(x) \, \mathrm{d}x$ (formule d'Euler-Mac Laurin).

(c) Montrer que pour tout entier naturel p :

$$|I_{2p+1}| \leq \frac{|B_{2p}|}{2\,(2p)!} \max_{x \in [0,1]} |f^{2p+1}(x)|.$$

(d) Soit g un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([a,b], \mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$ et a et b des réels tels que $a < b$. Que devient la formule d'Euler-Mac Laurin en remplaçant f par $t \mapsto g(a + t(b-a))$?

5. — Exemple d'application de la formule d'Euler-Mac Laurin au calcul approché de sommes de séries — On note S la somme de la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$, et pour tout entier $n \geq 1$, S_n sa somme partielle d'ordre n et R_n son reste d'ordre n.

(a) Ecrire la formule d'Euler-Mac Laurin pour l'application $f \ : \ [0,1] \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \frac{1}{(j+x)^3}$ où j est un entier strictement positif.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire de la sous-question précédente l'existence de réels a_k, $k = 0, 1, \ldots, p$ tels que :

$$R_n = \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{n^{2k+2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2p+2}} \right) \ (n \to +\infty).$$

Donner une majoration de $\left| R_n = \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{a_k}{n^{2k+2}} \right|$ en fonction des nombres de Bernoulli.

(c) En déduire une valeur approchée de S_n à 10^{-12} près.

En complément, ceux qui désirent aller plus loin pourrons étudier le sujet ***Centrale 2011*** **.**