Indications pour DM n°6

EXERCICE 2Bis

1. —

(a) Pour commencer observons qu'étant donné un polynôme à coefficients réels, disons $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, un polynôme Q, vérifie $Q' = P$ si et seulement si, il existe un réel b_0 tel que

$$Q = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i + b_0,$$

De telle sorte que Q vérifie à la fois $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(t)\mathrm{d}t$ si et seulement si il est LE polynôme

$$\sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i} X^i - \sum_{i=1}^{d+1} \frac{a_{i-1}}{i(i+1)}, \tag{1}$$

polynôme que nous noterons $\Phi(P)$. Donc, il existe une et une seule suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui satisfasse aux conditions i., ii. et iii. C'est LA suite de polynômes, définie récurrsivement par......

Reste à vérifier qu'une telle suite est bien à valeurs dans $\mathbf{Q}[X]$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. La formule de Taylor dit : $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Le résultat en résulte par la propriété ii. du (a),

Après calculs : $\boxed{P_1 = X - \frac{1}{2}, P_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, P_3 = X^3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}X}$.

(b) i. Posons pour tout entier naturel n, $Q_n = (-1)^n P_n(1-X)$. On montre alors que cette suite satisfait les conditions 1. (a) i. ii., et iii.,

ii. Poser pour tout entier naturel n, $R_n(X) = 2^{n-1}\left(P_n\left(\frac{X}{2}\right) + P_n\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)$; et raisonner comme au **i.**

iii. Pour tout entier naturel n on désigne par $\mathbf{H}_n$ la propriété :

$$P_n(X+1) - P_n(X) = nX^{n-1}. \tag{$\mathbf{H}_n$}$$

On la prouve par récurrence Mais il y a d'autres méthodes

2. — Etude des nombres de Bernoulli —

(a) L'égalité 1. (c) i., donne

$$P_{2k+1}(1) = -P_{2k+1}(0) \tag{2}$$

Mais d'après les propriétés ii. et iii. du 1. (a)

$$P_n(1) - P_n(0) = 0. \tag{3}$$

(b) D'après (3) et 1. (b), pour tout entier $n \geq 2$, $B_n = P_n(0) = P_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_{n-k}$. et donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_{n-k} = 0 \tag{4}$$

Les nombres de Bernoulli d'indices impairs supérieurs à 1 étant nuls, l'écriture de (4) pour $n = 0, 2, 4 \ldots, 2p$ donne :
$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} B_0 + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} B_2 = -\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} B_1, \\ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} B_0 + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} B_2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} B_4 = -\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} B_1, \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 2p+2 \\ 0 \end{pmatrix} B_0 + \begin{pmatrix} 2p+2 \\ 2 \end{pmatrix} B_2 \cdots + \begin{pmatrix} 2p+2 \\ 2p-2 \end{pmatrix} B_{2p} = -\begin{pmatrix} 2p+2 \\ 1 \end{pmatrix} B_1. \end{cases}$$

3. (a) Commençons par des remarques. Soit $k \in \mathbf{N}$,
   - D'après 1. (c) i. $P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $P_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Donc P_{2k+1} s'annule en 0, 1 et $\frac{1}{2}$.
   - D'après 1. (c) ii. $P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{k-1}} - 1\right) P_k(0)$ Donc $P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)$ est de signe opposé à $P_{2k}(0)$. Rappelons avoir vu que $P_{2k}(0) = P_{2k}(1)$.

   Notons alors pour tout entier $k \geq 1$, On note $\mathbf{R}_k$ la propriété : P_{2k+2} admet dans $[0, 1]$ exactement deux racines l'une dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ l'autre dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, en lesquelles il change de signe;
   - L'expression de P_2, assure que $\mathbf{R}_1$ est vraie.
   - Soit un entier $k \geq 1$. On suppose que $\mathbf{R}_k$ est vrai.
     On note α et β les racines de P_{2k}, $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1$. Pour fixer les idées on suppose $P_{2k} > 0$ sur $]0, \alpha[$. Comme alors P_{2k} est proportionnel à la dérivée de P_{2k+1}, on a les variations de P_{2k+1} et son signe, puis comme P_{2k+1} est proportionnel à la dérivée de P_{2k+1}, on a les variations de P_{2k+2} :

t	0		α		$\frac{1}{2}$		β		1
P_{2h}		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
P_{2h+1}	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0
P_{2h+2}		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

     Donc la fonction polynomiale P_{2k+2} induit un homéomorphisme de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ sur $\left]P_{2k+1}(0), P_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)\right[$ et puisque $P_{2k+2}\left(\frac{1}{2}\right)$ est de signe opposé à $P_{2k+2}(0)$, P_{2k+2} s'annule en un et un seul point de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ en lequel il change de signe. De même P_{2k+2} s'annule-t'il en un et un seul point de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, en lequel il change de signe.

   La propriété est $\mathbf{R}_h$ est donc vraie pour tout entier $h \geq 1$:
   P_{2k} admet dans $[0, 1]$ exactement deux zéros éléments de $]0, 1[$; .
   En revenant au tableau de variations de P_{2h+1} on voit que :
   P_{2h+1} admet dans $[0, 1]$ exactement trois zéros 0, $\frac{1}{2}$ et 1.

   (b) Résulte directement du tableau de variations.

4. — Formule d'Euler-Mac Laurin — Soit f un élément de $\mathcal{C}^{2p+1}([0, 1], \mathbf{R})$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.
   (a) C'est du cours l'idée consiste à partir de $f(0) - f(1) = \int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t$. On effectue une intégration par parties en dérivant f' et en primitivant la fonction constante égale à 1 en $t - 1 \mapsto t - 1$, on obtient :
$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (t - 1) f''(t)\mathrm{d}t.$$
   On peut itérer les intégrations par parties pour obtenir la formule, à chaque fois on primitive le terme polynômial de sorte que la primitive s'annule en 1.

(b) Dans la formule d'Euler-Mac Laurin on procède de même mais la fonction constante égale à 1 est primitivée initialement en en P_1, au cours des intégrations par parties suivantes on prendra comme primitive de P_n, $\frac{1}{n+1}P_{n+1}$. La preuve se fait par récurrence...

(c) Résulte de la majoration de P_{2p+1}.

(d) En remplaçant f par $t \mapsto g(a+t(b-a))$, dans la formule précédente, on obtient :

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}(b-a)^{2k}}{(2k)!}\left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)(a)}\right) - \frac{(b-a)^{2p+2}}{(2p+1)!}\int_0^1 P_{2p+1}g^{(2p+1)}(a+x(b-a))\mathrm{d}x.$$