DS n$^{\text{o}}$3

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités (jusqu'à 15% de la note) pour :
— manque de soin ou de lisibilité ;
— formules mathématiques non ponctuées ;
— recours à des abréviations autres que ssi (tt., qqs., fct., ens...), ou symbloles logiques mélangés à du texte.

L'usage de la calculatrice est interdite.

Les élèves traiteront un et un seul des trois sujets proposés : un sujet type Mines-Centrale, un sujet type CCP, tous deux sur cette liasse, et un sujet X-ÉNS à part.

SUJET TYPE MINES-CENTRALE

EXERCICE

1. On considère la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

2. (a) Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

On **admet** l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

(b) Déterminer, pour $j \in \mathbf{N}^*$, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} \mathrm{d}t$.

3. Donner le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $t \longmapsto \ln g(t)$.

4. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t$.

5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(a) Vérifier que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} \mathrm{d}t$ est convergente.

(b) Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \mathrm{d}t$?

PROBLÈME

Avertissement : dans ce problème, apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement leur convergence même lorque ce n'est pas explicitement demandé.

I. Préliminaires.

1. Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall t \in]-1, +\infty[, \ \ln(1+t) \leq t \qquad (1).$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, \ t\ln(t) \geq -\frac{1}{e} \qquad (2).$$

2. Soit ψ une bijection de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J. Si ψ est de classe C^1 sur I, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit un C^1-difféomorphisme de I sur J. Dans ce cas, rappeler l'expression de la dérivée de ψ^{-1}.

II. Construction d'une application particulière.

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbf{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{\rho} \exp\left(\left(\frac{1}{2} - \rho\right) x^2\right) \qquad (A).$$

On note H_0, le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0

3. Soit F_f définie par
$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$
En particulier,
$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$
Montrer que F_f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\left]0, \sqrt{2\pi}\right[$.
4. Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait
$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$
5. Montrer que φ est monotone et que φ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
6. Pour tout réel x, calculer
$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2.$$
et
$$\ln((\varphi^{-1})'(x)) + \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2.$$
7. Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)f(u)e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$.
Montrer l'identité suivante :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$
8. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$, on ait :
$$\int_{x}^{x+1} \varphi^2(u)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \geq \varphi^2(x)e^{-(x+1)^2/2}.$$
9. Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geq B$, on ait :
$$|\varphi(u)| \leq e^{(|u|+1)^2/4}$$
10. Déterminer une primitive de la fonction
$$u \mapsto (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}$$
11. Calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

III. Une inégalité intéressante.

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln(f(u))e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u-\varphi(u)|^2 e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

12. Justifier la convergence de ces deux intégrales.
13. Montrer l'identité :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

14. Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u)))e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u. \tag{3}$$

15. Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?
16. Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

FIN du PROBLEME

SUJET TYPE CCP.

EXERCICE

1. Montrer pour tout réel x la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

   On considère dans la suite l'application
$$f\ :\ ]0,+\infty[\to \mathbf{R}\,;\ x\mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f(2)$ sans recourir au signe intégrale.
3. Montrer que f est monotone, on précisera si elle croît ou décroît.
4. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a :
$$\frac{2}{2x}\leq f(x)\leq \frac{1}{x}.$$
   on pourra encadrer l'intégrande dans l'intégrale définissant f.
5. Étudier les limite éventuelles de f en 0 et $+\infty$. Donner l'allure de la courbe représentative de f.
   On donne $\ln(2)\approx 0,7$.
6. Pour tout élément x de $]0,+\infty[$ calculer $f(x)+f(x+1)$. En déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
7. Soit a un réel. Étudier en fonction de a l'intégrabilité de l'application
$$f_a\ :\ [2,=\infty[\to \mathbf{R}\,;\ t\mapsto f(t)\ln(t)^a.$$

PROBLÈME

Les deux premières parties du problème sont indépendantes. La deuxième partie étudie un exemple d'interpolation de Hermite et la troisième partie quelque propriétés d'une famille de polynômes qui portent le nom de ce même mathématicien.

On note $\mathbf{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, $\mathbf{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On note $\mathbf{R}(X)$ le corps des fractions ratinnelles à coefficients réels.

Pour tout polynôme $P\in\mathbf{R}[X]$, on note P' le polynôme dérivé de P et, pour tout entier naturel n, on note $P^{(n)}$ le n^{e} polynôme dérivé de P. Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Première partie : questions préliminaires

Soit n un entier naturel non nul.

III.1. Soit P et Q deux polynômes non nuls à coefficients complexes.

III.1.a. Démontrer que si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux (on pourra raisonner par l'absurde).

III.1.b. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. En utilisant le théorème de Gauss, démontrer que si P et Q divisent un troisième polynôme R à coefficients complexes, alors il en est de même pour le polynôme PQ.

III.2. Soit $(P_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbf{R}[X]$. On considère le polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ et la fraction rationnelle $Q \in \mathbf{R}(X)$ définis par $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ et $Q = \dfrac{P'}{P}$.

Démontrer par récurrence que $Q = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P_i'}{P_i}$.

Deuxième partie : interpolation de Hermite

Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$, p un entier naturel non nul, $(x_i)_{i=1,\dots,p}$ une famille d'éléments de I distincts deux à deux et $(a_i)_{i=1,\dots,p}$ et $(b_i)_{i=1,\dots,p}$ deux familles de réels quelconques.

III.3. Définition du polynôme interpolateur de Hermite

III.3.a. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ et $a \in \mathbf{R}$. En utilisant la formule de Taylor, démontrer que :
si $P(a) = P'(a) = 0$ alors $(X-a)^2$ divise P.

III.3.b. En utilisant la question préliminaire **III.1**, démontrer que l'application ϕ de $\mathbf{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbf{R}^{2p}$ définie par

$$\phi(P) = (P(x_1), P(x_2), \cdots, P(x_p), P'(x_1), P'(x_2), \cdots, P'(x_p))$$

est une application linéaire bijective de $\mathbf{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbf{R}^{2p}$.

III.3.c. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_H \in \mathbf{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq p$, on a $P_H(x_i) = a_i$ et $P_H'(x_i) = b_i$.

Le polynôme P_H est appelé polynôme interpolateur de Hermite.

III.4. Étude d'un exemple

Déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite (défini à la question **III.3**) lorsque $p = 2$, $x_1 = -1, x_2 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = -1$ et $b_2 = 2$

III.5. Une formule explicite

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$, on considère le polynôme $Q_i = \prod\limits_{\substack{j=1,\dots,p \\ j\neq i}} \left(\dfrac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)^2$.

III.5.a. Soit i un entier vérifiant $1 \leq i \leq p$. Calculer $Q_i(x_k)$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$ et démontrer qu'on a

$$Q_i'(x_k) = 0 \text{ dans le cas } k \neq i \quad \text{et} \quad Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=1,\dots,p \\ j\neq i}} \frac{2}{x_i - x_j}$$

On pourra utiliser la question préliminaire **III.2**.

III.5.b. Démontrer que le polynôme P défini par la formule

$$P = \sum_{i=1}^{p} \Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i) b_i \Big] Q_i$$

est le polynôme d'interpolation de Hermite défini à la question **III.3**.

III.5.c. Retrouver le polynôme de la question **III.4** en utilisant cette formule.

Troisième partie : polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la famille des polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$H_{n+1} = XH_n - H_n'.$$

III.6. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.
III.7. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.
Pour tous polynôme P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

la fonction f étant défénie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

III.8. Un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$

III.8.a. Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbf{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q\rangle$.

III.8.b. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

III.9. Une famille orthogonale
Dans la suite, $\mathbf{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|.\|$.

III.9.a. Démontrer que, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle.$$

III.9.b. En déduire que , pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$.

III.9.c. Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

III.9.d. Soit $P = X^3+X^2+X+1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i, i=0,...,3 tels que $P = \sum_{i=0}^{3} a_iH_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbf{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbf{R}_0[X]$.

III.10. Étude des racines des polynômes H_n
Soit $n \in \mathbf{N}$. On désigne par p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, on note $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ses racines et S le polynôme défini par

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \quad\text{et}\quad S = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i) \text{ sinon.}$$

III.10.a. Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n\rangle = 0$.

III.10.b. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.

III.10.c. En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

Fin de l'énoncé