I. Préliminaires

1. La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est concave sur son intervalle de définition $]-1,+\infty[$ (la dérivée seconde est négative), donc la courbe représentative est située au-dessus de la tangente au point d'abscisse 0, ce qui fournit l'inégalité

$$\forall t \in]-1,+\infty[\qquad \ln(1+t) \leq t\ .$$

La fonction $g : t \mapsto t\,\ln t$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, vérifie $g'(t) = 1 + \ln t$. On a donc g décroissante sur $]0, e^{-1}]$, croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$ et $g(t)$ est minimal pour $t = e^{-1}$, ce qui donne l'inégalité

$$\forall t \in]0,+\infty[\qquad t\,\ln t \geq g(e^{-1}) = -\frac{1}{e}\ .$$

2. D'après le cours, ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I sur J si et seulement si $\forall x \in I \quad \psi'(x) \neq 0$. Dans ce cas, on a, sur J, $(\psi^{-1})' = \dfrac{1}{\psi' \circ \psi^{-1}}$, autrement dit, si $y \in J$, on a $(\psi^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\psi'(x)}$ en posant $x = \psi^{-1}(y) \in I$, c'est-à-dire $y = \psi(x)$.

II. Construction d'une application particulière

3. • Si $f \in H$, alors pour un certain $\rho > 0$, on a une majoration de la forme

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \left| f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \right| = f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\rho}\, e^{-\rho u^2}\ ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$ (en effet, $\lim\limits_{u \to \pm\infty} u^2 e^{-\rho u^2} = \lim\limits_{v \to +\infty} v e^{-\rho v} = 0$ par croissances comparées, donc $e^{-\rho u^2}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{u^2}$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$). Comme $f \in H_0$, la fonction $u \mapsto f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $]-\infty, x]$ pour tout x réel, ce qui justifie l'existence de $F_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• La fonction F_f est une primitive de la fonction *continue* $u \mapsto f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}$, donc F_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad (F_f)'(u) = f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \neq 0\ .$$

Donc F_f ralise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $F_f(\mathbb{R})$. De plus on a $\lim\limits_{-\infty} F_f = 0$ (reste d'une intégrale convergente) et $\lim\limits_{+\infty} F_f = \sqrt{2\pi}$ car $f \in H_0$, donc

$$F_f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} F_f, \lim_{+\infty} F_f[=]0, \sqrt{2\pi}[$$

Conclusions : F_f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (croissant) de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$.

4. Il existe une et une seule fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_f\big(\varphi(x)\big) = F_1(x)\ .$$

c'est :

$$\varphi = (F_f)^{-1} \circ F_1.$$

5. L'application φ est la composée de deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes (F_1 de $\mathbb{R}$ sur $]0, \sqrt{2\pi}[$, puis $(F_f)^{-1}$ de $]0, \sqrt{2\pi}[$ sur $\mathbb{R}$), donc c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; il est strictement croissant comme composée de deux applications strictement croissantes.

6. On a $\varphi'(x) > 0$ pour tout x réel, d'où l'existence de $\ln\big(\varphi'(x)\big)$. Dérivons la relation $\varphi = (F_f)^{-1} \circ F_1$, cela donne

$$\varphi' = (F_1)' \cdot \Big(\big((F_f)^{-1}\big)' \circ F_1 \Big) = \frac{(F_1)'}{(F_f)' \circ (F_f)^{-1} \circ F_1} = \frac{(F_1)'}{(F_f)' \circ \varphi}\ ,$$

autrement dit, pour tout x réel, on a la relation

$$\varphi'(x) = \frac{F_1'(x)}{F_f'\big(\varphi(x)\big)} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{f\big(\varphi(x)\big)\, e^{-\frac{\varphi(x)^2}{2}}} .$$

En prenant le logarithme, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \ln\big(\varphi'(x)\big) + \ln\Big(f\big(\varphi(x)\big)\Big) - \frac{1}{2}\,\varphi(x)^2 = -\frac{x^2}{2} .$$

De même, $(\varphi^{-1})'(x) > 0$ et, de $\varphi^{-1} = (F_1)^{-1} \circ F_f$, on tire

$$(\varphi^{-1})' = \frac{(F_f)'}{(F_1)' \circ \varphi^{-1}} , \qquad \text{soit} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi^{-1})'(x) = \frac{f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{\varphi^{-1}(x)^2}{2}}} ,$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \ln\big((\varphi^{-1})'(x)\big) - \ln\big(f(x)\big) - \frac{1}{2}\,\big(\varphi^{-1}(x)\big)^2 = -\frac{x^2}{2} .$$

7. La fonction $g : u \mapsto h(u) f(u) e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, l'application φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; il résulte donc d'un théorème du programme que l'application $(g \circ \varphi)\, \varphi'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ avec $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} (g \circ \varphi)\, \varphi'$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u &= \int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\varphi(v)\big)\, f\big(\varphi(v)\big)\, e^{-\frac{\varphi(v)^2}{2}}\, \varphi'(v)\, \mathrm{d}v \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\varphi(v)\big)\, e^{-\frac{v^2}{2}}\, \mathrm{d}v,\end{aligned}$$

d'après les calculs de la question précédente.

8. Prenons $A = \max\big\{1, \varphi^{-1}(0)\big\}$. On a alors $A > 0$ et, pour $x \geq A$, la fonction φ est croissante et positive sur $[x, x+1]$ donc il en est de même de φ^2, la fonction $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est décroissante et positive sur $[x, x+1]$; ainsi, pour $u \in [x, x+1]$, on a $\varphi^2(u) \geq \varphi^2(x) \geq 0$ et $e^{-\frac{u^2}{2}} \geq e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \geq 0$ donc, en multipliant membre à membre ces inégalités, on a

$$\forall u \in [x, x+1] \qquad \varphi^2(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \geq \varphi^2(x)\, e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} .$$

Enfin, en intégrant par rapport à u sur le segment $[x, x+1]$, on obtient l'inégalité demandée.

9. • Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. La fonction $g : u \mapsto h(u)\, f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq h(u)\, f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} = u^2\, f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\rho}\, u^2\, e^{-\rho u^2} ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$ par des considérations de croissances comparées habituelles. De la question **7.**, on déduit alors que la fonction $u \mapsto \varphi(u)^2\, e^{-\frac{u^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne notamment que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\varphi^2(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 0$. Il existe donc un réel positif C tel que pour tout $x\in[C,+\infty[$,

$$\int_x^{x+1}\varphi^2(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \le 1\ .$$

Pour $x \ge \max\{A,C\}$, on a alors, par la question **8 .**, $\varphi^2(x)\,e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \le 1$, donc $|\varphi(x)| \le e^{\frac{(x+1)^2}{4}} = e^{\frac{(|x|+1)^2}{4}}$.

- Pour achever de répondre à la question, il faut reprendre une démarche analogue lorsque x tend vers $-\infty$. Commençons par dire que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_{x-1}^{x}\varphi^2(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 0$ donc il existe un réel négatif C' tel que pour tout $x\in]-\infty,C']$,

$$0\le\int_{x-1}^{x}\varphi^2(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \le 1\ .$$

Par ailleurs, en prenant $A' = \min\left\{0,\varphi^{-1}(0)\right\}$, si $x\le A'$, alors, pour tout $u\in[x-1,x]$, on a $\varphi(u)\le\varphi(x)\le 0$ d'où $0\le\varphi^2(x)\le\varphi^2(u)$, et $0\le x^2\le u^2\le(x-1)^2 = (|x|+1)^2$, donc $0\le e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}} \le e^{-\frac{u^2}{2}}$ puis, par multiplication d'inégalités à membres positifs, $\varphi^2(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}} \ge \varphi^2(x)\,e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}}$; en intégrant enfin cette inégalité par rapport à u sur $[x-1,x]$, on obtient, pour tout $x\in]-\infty,A']$

$$\int_{x-1}^{x}\varphi^2(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \ge \varphi^2(x)\,e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}}\ .$$

Pour $x\le\min\{A',C'\}$, on a alors $\varphi^2(x)\,e^{-\frac{(|x|+1)^2}{2}}\le 1$, c'est-à-dire $|\varphi(x)|\le e^{\frac{(|x|+1)^2}{4}}$.

- Il ne reste plus qu'à choisir $B=\max\{A,C,|A'|,|C'|\}$ pour en finir avec cette question assez technique. On a maintenant pour tout rel u tel que $|u|\ge B$

$$|\varphi(u)|\le e^{\frac{(|u|+1)^2}{4}}\ .$$

10. Remarquons que, si g est une fonction dérivable, alors la dérivée de $ug(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}$ vaut :

$$\big(g'(u)-u\,g(u)\big)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\ .$$

On cherche alors g telle que $g'(u)-u\,g(u) = u\,\varphi(u)-u^2-\varphi'(u)+1$ et on trouve, sans trop de peine que $g(u)=u-\varphi(u)$ convient. En conclusion,

$$\int^u\big(v\,\varphi(v)-v^2-\varphi'(v)+1\big)\,e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv = \big(u-\varphi(u)\big)\,e^{-\frac{u^2}{2}}+C\ .$$

11. Si a et b sont deux réels, on a donc

$$\int_a^b\big(u\,\varphi(u)-u^2-\varphi'(u)+1\big)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \big(b-\varphi(b)\big)\,e^{-\frac{b^2}{2}}-\big(a-\varphi(a)\big)\,e^{-\frac{a^2}{2}}\ .$$

Or, la fonction $u \mapsto \big(u - \varphi(u)\big) e^{-\frac{u^2}{2}}$ tend vers zéro en $-\infty$ et $+\infty$: en effet, $\lim\limits_{u\to\pm\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} = 0$ et, pour $|u|$ assez grand, on a

$$0 \leq |\varphi(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}}| \leq \exp\Big(\frac{(|u|+1)^2}{4} - \frac{u^2}{2}\Big) = \exp\Big(-\frac{u^2 - 2|u| - 1}{4}\Big) \underset{u\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

L'intégrale I est donc convergente et

$$I = \lim_{b\to+\infty} \big(b - \varphi(b)\big)\, e^{-\frac{b^2}{2}} - \lim_{a\to-\infty} \big(a - \varphi(a)\big)\, e^{-\frac{a^2}{2}} = 0\ ;.$$

Remarque. Ce raisonnement prouve seulement la convergence de l'intégrale (doublement) impropre I, et non pas l'intégrabilité de la fonction considérée (l'intégrande) comme il est demandé dans le préambule...

III. Une inégalité intéressante

12. • En utilisant l'inégalité **(2)** du "préliminaire" et le fait que $f \in H$, on obtient

$$-\frac{1}{e}\, e^{-\frac{u^2}{2}} \leq f(u)\, \ln\big(f(u)\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \frac{1}{\rho}\, e^{-\rho u^2}\Big(-\ln\rho + (\frac{1}{2} - \rho)u^2\Big)\ .$$

La fonction $u \mapsto f(u)\, \ln\big(f(u)\big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}$ est encadrée par deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$. *En effet, si a, b, c sont trois fonctions réelles continues par morceaux sur un intervalle J et vérifient $a \leq b \leq c$ sur J, les fonctions a et c étant intégrables sur J, on déduit les inégalités $b \leq c \leq |c|$, $-b \leq -a \leq |a|$, puis $|b| \leq \max\{|a|, |c|\} \leq |a| + |c|$ et la fonction $|a| + |c|$ est intégrable sur J, donc b aussi.* On a donc la convergence (absolue) de l'intégrale $E(f)$.

• Pour la convergence de l'intégrale $\Phi(f)$, notons que

$$\big|u - \varphi(u)\big|^2\, e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \big(|u| + \varphi(u)\big)^2\, e^{-\frac{u^2}{2}} = u^2\, e^{-\frac{u^2}{2}} + 2|u|\,\varphi(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} + \varphi(u)^2\, e^{-\frac{u^2}{2}}$$

et chaque terme est une fonction de u intégrable sur $\mathbb{R}$ (*évident pour le premier, déjà dit à la question* **9.** *pour le troisième, et conséquence de $2|u|\varphi(u) \leq u^2 + \varphi(u)^2$ pour le deuxième*).

13. En appliquant la question **7.** avec $h(u) = \ln\big(f(u)\big)$, on obtient

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\Big(f\big(\varphi(u)\big)\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u\ .$$

14. Calculons :

$$\begin{aligned}
E(f) - \Phi(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\ln\Big(f\big(\varphi(u)\big)\Big) - \frac{1}{2}\big(u - \varphi(u)\big)^2\right] e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2}\varphi(u)^2 - \frac{u^2}{2} - \ln\big(\varphi'(u)\big) - \frac{u^2}{2} + u\varphi(u) - \frac{1}{2}\varphi(u)^2\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(u\,\varphi(u) - u^2 - \ln\big(\varphi'(u)\big)\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

en utilisant les calculs de la question **6.** Par ailleurs, cela ne change de retrancher l'intégrale I de la question **11.**, cette dernière étant nulle. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
E(f) - \Phi(f) &= E(f) - \Phi(f) - I \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(u\varphi(u) - u^2 - \ln\big(\varphi'(u)\big) - u\varphi(u) + u^2 + \varphi'(u) - 1\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\varphi'(u) - 1 - \ln\big(\varphi'(u)\big)\Big)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

15. De l'inégalité **(1)** du préambule, on déduit $E(f) \geq \Phi(f)$.

16. Une condition nécessaire et suffisante pour que $E(f)$ soit égal à $\Phi(f)$ est que l'on ait $\forall u \in \mathbb{R} \quad \varphi'(u) - 1 - \ln\big(\varphi'(u)\big) = 0$ (*en effet, une fonction continue, positive, et intégrable sur* $\mathbb{R}$ *a une intégrale nulle si et seulement si c'est la fonction nulle*). Or, la fonction $x \mapsto \ln x - x + 1$ ne s'annule que pour $x = 1$, la condition citée équivaut donc à $\varphi'(u) = 1$, soit $\varphi(u) = u + C$.

Mais, si $\varphi(x) = x + C$, alors $\varphi^{-1}(x) = x - C$ et la deuxième relation de la question **6.** donne $f(x) = \exp\Big(Cx - \dfrac{C^2}{2}\Big)$. On vérifie qu'un tel choix de f conduit bien à $\varphi(x) = x + C$: en effet,

$$\int_{-\infty}^{x+C} e^{Cu - \frac{C^2}{2}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x+C} e^{-\frac{(u-C)^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u\,.$$

Il reste enfin à vérifier que la fonction $x \mapsto \exp\Big(Cx - \dfrac{C^2}{2}\Big)$ appartient à H_0, ce qui est un peu pénible... Allons-y toutefois : pour tout $C \in \mathbb{R}$ fixé, il faut prouver l'existence de $\rho > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 1$, en posant

$$g(x) = \rho\, \exp\Big(\rho x^2 - \frac{(x-C)^2}{2}\Big) = \rho\, \exp\Big((\rho - \frac{1}{2})x^2 + Cx - \frac{C^2}{2}\Big)\,.$$

($g(x)$ dépend aussi des paramètres C et ρ). On constate que $g'(x) = \big((2\rho - 1)x + C\big)\, g(x)$ donc, en choisissant $\rho \in \Big]0, \dfrac{1}{2}\Big[$, la fonction g est positive et atteint son maximum en $x = \dfrac{C}{1 - 2\rho}$; on calcule la valeur de ce maximum, on trouve $\max\limits_{\mathbb{R}} g = \rho\, \exp\Big(\dfrac{\rho C^2}{1 - 2\rho}\Big)$. Comme cette expression tend vers zéro lorsque ρ tend vers 0, il est bien possible de choisir $\rho \in \Big]0, \dfrac{1}{2}\Big[$ pour lequel ce maximum est inférieur à 1, la condition **(A)** de l'énoncé est alors vérifiée pour une telle valeur de ρ, donc $f \in H$, puis $f \in H_0$ (*évident : translation de la variable dans l'intégrale comme ci-dessus*).

En conclusion, les fonctions f telles que $E(f) = \Phi(f)$ sont les fonctions $x \mapsto \exp\Big(Cx - \dfrac{C^2}{2}\Big)$, pour tout C réel.