DM n$^{\text{o}}$8

EXERCICE

(5/2) Soit la série entière de la variable complexe z, $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.

(3/2) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on considère l'application $u_n \ : \ \mathbf{C} \to \mathbf{C}\,;\, z \mapsto \frac{z^n}{\sqrt{n}}$.

1. (5/2)Donner le rayon de convergence de cette série entière. On note f sa somme.
   (3/2) Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que si $|z| < 1$ la série $\sum_{n\geq 1} u_n(z)$ converge et que si $|z| > 1$ alors elle diverge.
   On note f l'application $D \to \mathbf{C}\,;\ z \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$, où $D = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$.
2. Déterminer l'ensemble Z des complexes z pour lesquels l'application
$$u \mapsto \frac{1}{e^{u^2} - z}$$
   est continue par morceaux intégrable sur $]0, +\infty[$.
   Soit
$$g \ : \ Z \to \mathbf{C}\,;\ z \mapsto \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{e^{u^2} - z}.$$
3. (5/2) Montrer que f et g coïncident sur $\{z \in \mathbf{C}|\ |z| < 1\}$.
4. Montrer que $f(\mathrm{e}^{i\theta}) = g(\mathrm{e}^{i\theta})$, pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$.

PROBLÈME

Étude topologique des polynômes à coefficients entiers

Partie I : Polynômes de Tchébytchev

Les polynômes de Tchébytchev jouent un rôle crucial en mathématiques, ils sont incontournables pour les concours. Il convient de connaitre par cœur ce qui suit.

On se propose de montrer de deux manières différentes le résultat suivant :
Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un et un seul polynôme P_n tel que pour tout réel θ,

$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta). \tag{1}$$

On dit que P_n, est le n^{e} polynôme de Bernoulli.

1. *Unicité*
   Soit un entier $n \geq 1$. On suppose qu'il existe des polynômes P_n et $\tilde{P}_n$ tels que pour tout réel θ,
$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta) = \tilde{P}_n(\cos\theta).$$
   Montrer que $P_n = \tilde{P}_n$.
2. *Méthode recourant aux nombres complexes*

   Soit n un entier naturel.

(a) Soit θ un réel. Montrer que $\cos(n\theta) = \Re\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big)$. En déduire qu'il existe un polynôme P_n tel que l'on ait (1).

(b) Montrer que le polynôme P_n est de degré n et préciser son coefficient dominant c_n.

3. *Méthode recourant à une récurrence*

   (a) Soit θ un réel. Exprimer pour tout entier $n \geq 2$, $\cos((n+1)\theta)$ au moyen de $\cos((n-1)\theta)$, $\cos(n\theta)$ et $\cos(\theta)$.

   (b) En utilisant la sous-question précédente, montrer par récurrence l'existence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ des polynômes de Bernoulli, dont on précisera au passage le degré et le coefficient dominant c_n.

4. *Une propriété de minimisation*
   Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n = \frac{1}{c_n}P_n$, de sorte que T_n soit unitaire.

   (a) Montrer que pour tout élément x de $[-1,1]$ et tout entier $n \geq 1$, $T_n(x) = \frac{1}{c_n}\cos\big(n\arccos(x)\big)$.

   (b) Soit n un entier strictement positif. Montrer que $\{|T_n(x)|, x \in [-1,1]\}$ admet un plus grand élément M_n à déterminer. Déterminer les points x de $[-1,1]$ en lesquels $|T_n(x)| = M_n$, on précisera pour chacun d'eux le signe de $T_n(x)$.

   (c) Soit U un polynôme à coefficients réels unitaire de degré n. Montrer que $\{|U(x)|, x \in [-1,1]\}$ admet un plus grand élément M'_n.

   (d) Montrer que $M'_n \geq M_n$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde et étudier les valeurs de $U - T_n$ aux points en lesquels $|T_n|$ est maximum.

Partie 2. Théorème de Chudnovsky

Soit le polynôme à coefficients entiers, $p = 2X(1-X)$. La suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où $p_0 = p$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$p_n = \underbrace{p \circ p \circ \ldots \circ p}_{n \text{ termes}},$$

Soit $[a,b]$ un segment. On suppose dans cette partie que $[a,b]$ est inclus dans $]0,1[$. On pose par ailleurs $D_2 = \left\{\frac{p}{2^q}, (p,q) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}\right\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $(p_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.
3. Soient $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites d'applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ qui convergent uniformément et respectivement vers des applications f et g.
   Montrer que la suite $(f_n + g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (resp. $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbf{N}}$) converge vers $f+g$ (resp. fg)).
4. Montrer que toute fonction polynomiale q de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, à coefficients dans D_2 est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ à coefficients entiers.
5. Montrer que D_2 est dense dans $\mathbf{R}$.
6. On désigne par $P([a,b])$ l'ensemble des fonctions polunomiales de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ *à coefficients entiers*. Montrer que $P([a,b])$ est une partie dense de l'espace vectoriel normée $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ (théorème de Chudnovsky).
7. Montrer que $P([0,1])$, ensemble des fonctions polunomiales de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ *à coefficients entiers* n'est pas une partie dense de $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Partie 3.

Nous ne supposerons pas dans cette partie que $[a,b]$ est inclus dans $]0,1[$, et nous y supposerons même que $b-a>4$. Nous nous proposons démontrer que $P([a,b))$ est fermé dans $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}),\|\cdot\|_\infty)$

Soit alors une suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $P([a,b])$ qui converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}),\|\cdot\|_\infty)$ vers un élément q supposé non nul. Les termes de la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont alors non nuls à partir d'un certain rang, et quitte à extraire une sous-suite nous supposerons qu'aucun de ses termes n'est nul. On peut alors pour tout entier $n\geq 0$, définir le degré d_n de q_n et son coefficient dominant a_n.

Soit ϕ l'application

$$[-1,1]\to[a,b]\,;\ t\mapsto\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$ $q_n\circ\phi$ est un élément est une application polynomiale de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$, dont on précisera le degré et le coefficient dominant b_n ; dans la suite on notrea p_n cet élément.
2. Pour tout entier naturel n tel que d_n soit non nul montrer :

$$\|p_n\|_\infty\geq 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{d_n}.$$

   On utilisera la partie 1.
3. En déduire que la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
4. Montrer que pour tout entier naturel δ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à δ est un fermé de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbf{R}),\|\cdot\|_\infty)$.
5. Montrer que $q\in P([a,b])$.
6. Conclure.