DM facultatif n°12

Théorème de stabilité de Liapounov

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\langle .|. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}$ pouvant être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\|.\|$la norme euclidienne associée.
Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et k est un entier naturel non nul, u^k désigne l'application $u \circ \cdots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = id$.
On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' = \varphi(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$. Cela entraîne que si $x_0 = 0$, alors la solution de ce système est la fonction nulle, et donc 0 est un point d'équilibre. Notons $d\varphi(0)$ l'application différentielle de φ en 0 . L'objectif de ce problème est d'établir une condition suffisante sur le spectre de $d\varphi(0)$ pour assurer la stabilité de l'équilibre en ce point, et d'obtenir des informations quant à la dynamique des solutions au voisinage de ce point d'équilibre. Plus précisément, on établit le résultat suivant :

Théorème de Liapounov . *Soit le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} y' = \varphi(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$ et telle que toutes les valeurs propres complexes de $d\varphi(0)$ aient une partie réelle strictement négative. Alors il existe trois constantes $\tilde{\alpha}, C$ et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \|f_{x_0}(t)\| \leqslant Ce^{-\beta t} \|x_0\|,$$

où f_{x_0} est l'unique solution du système différentiel et $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$,de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Dans une première partie, on étudie une norme sur les endomorphismes des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Dans la seconde partie, on établit des résultats sur le système différentiel linéaire, en se servant des résultats de la partie A. Enfin, la troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liapounov. Cette dernière partie est très largement indépendante des deux premières, à l'exception du résultat obtenu à la fin de la partie B.

A. Étude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1. Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|u(x)\|.$$

2. On note $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3. Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $\|u\|$ et de lentier k.

B. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

4. (**Admis pour les 3/2.**) Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, ainsi que des entiers naturels non nuls $m_1, m_2, \ldots, m_r$, tels que :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

où pour $i \in [\![1;r]\!], E_i = \operatorname{Ker}(a - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$. D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbb{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1, \ldots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$. Fixons à présent $i \in [\![1;r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right. \text{ et } q_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \to & \mathbb{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array} \right. .$$

Par ailleurs, on note $|||\cdot|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x\in E_i\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||\cdot|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5. Montrer que, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$

6. Montrer que, pour $i \in [\![1;r]\!]$, E_i est stable par a.

7. Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbb{C}^n}$ et id_{E_j}.
8. Montrer que : $a = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.
9. En déduire que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i$$
10. Montrer par ailleurs que pour tout $i \in [\![1;r]\!]$,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |||e^{ta_i}|||_i \leq \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i \ id_{E_i} \ |||_i^k.$$
11. En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |||e^{ta}|||_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{t \ \mathrm{Re}(\lambda_i)}$$
où $\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z.
12. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbb{R}^n$ et v_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A, vue comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On conservera la notation $|||\cdot|||_c$ pour la norme introduite à la partie A sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et on utilisera $|||\cdot|||_r$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |||e^{tu_A}|||_r \leqslant C \ |||e^{tv_A}|||_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs, $Sp(A)$ le spectre complexe de A. Notons g_{x_0} l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de :
$$\begin{cases} y' = u(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

13. Montrer que l'équivalence des deux propositions suivantes :
    i. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t\to+\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0$.
    ii. le spectre $Sp(A)$ de A est inclus dans $et\mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$.
14. On se place dans cette question dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Montrer alors qu'il existe deux constantes C_2 et α strictement positives telles que :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |||e^{tu}|||_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t}$$
et en déduire une majoration de $\|g_{x_0}(t)\|$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

C. Démonstration du théorème de Liapounov

On considère dans cette partie une application φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = 0$, et en notant $a = d_\varphi(0)$, telle que toutes les valeurs propres de a aient une partie réelle strictement négative. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' &= \varphi(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases}.$$

On admettra l'existence d'une solution de ce système définie sur $\mathbb{R}_+$, que l'on notera f_{x_0}.

15. Montrer que la fonction

$$b : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) \mid e^{ta}(y) \right\rangle dt \end{array} \right.$$

est bien définie et qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

On notera q la forme quadratique associée à b, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, q(x) = b(x, x)$.

16. Démontrer alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2$$

Pour toute fonction y définie sur $\mathbb{R}_+$, on associe la fonction $\varepsilon(y)$ définie par :

$$\varepsilon(y) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \varphi(y(t)) - a(y(t)) \end{array} \right.$$

17. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$q\left(f_{x_0}\right)'(t) = -\left\|f_{x_0}(t)\right\|^2 + 2b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}(t)\right)\right)$$

18. Prouver l'existence de deux nombres réels α et β strictement positifs tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, si $q\left(f_{x_0}(t)\right) \leqslant \alpha$ alors :

$$-\left\|f_{x_0}(t)\right\|^2 + 2b\left(f_{x_0}(t), \varepsilon\left(f_{x_0}\right)(t)\right) \leqslant -\beta q\left(f_{x_0}(t)\right).$$

On fixe un tel couple (α, β) pour la suite de ce problème.

19. Montrer alors que si $q\left(x_0\right) < \alpha$ alors :

$$\forall t \geqslant 0,\ q\left(f_{x_0}\right)(t) \leqslant e^{-\beta t} q\left(x_0\right).$$

20. En deduire l'existence de trois constantes $\widetilde{\alpha}, C$ et β strictement positives telles que que :

$$\forall x_0 \in B(0, \widetilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \left\|f_{x_0}(t)\right\| \leqslant C\ e^{-\frac{\beta}{2} t} \left\|x_0\right\|,$$

où $B(0, \widetilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\widetilde{\alpha}$.

FIN DU PROBLEME