DS n°

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualitd́e la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être encadr's *à la règle*, le texte et les *formules* ponctués, un minimum de 80% des *s* ụ pluriel et de 70% des accents est requis.

Pńalités (jusqu'à 15% de la note) pour :

- manque de soin ou de lisibilité
- formules mathématiques non ponctués
- recours à des abréviations autres que ssi (tt., qqs., fct., ens...), ou symbloles logiques mélangés à ụ texte.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Les élèves traiteront un et un seul des trois sujets proposś : un sujet type Mines-Centrale, un sujet type CCP, tous deux sur cette liasse, et un sujet X-ÉNS à part.

Théorème de De Moivre-Laplace

Notations

Dans tout le problème :

- Par convention $0^0 = 1$.
- Si i et j sont des entiers naturels tels que $i \leq j$, on note $[\![i, j]\!]$ l'ensemble des entiers k tels que $i \leq k \leq j$.
- a et b sont des réels tels que $a < b$.
- Si x est un réel, on définit :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\} \quad \text{et} \quad \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}, x \leq k\}$$

- p est un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
- ζ est la fonction de $]-1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\zeta(x) = (x + 1)\ln(x + 1)$$

- Φ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.
- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p, ce que l'on note $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Résultats préliminaires

1 $\triangleright$ Rappeler la formule de Stirling. En déduire l'existence d'une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers 0 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n (1+\varepsilon_n).$$

2 $\triangleright$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

$$\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x \text{ et } \lceil \lambda x + \mu \rceil \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda x$$

3 $\triangleright$ Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)dt$ converge.

4 $\triangleright$ Démontrer que :

$$\zeta(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

Etude asymptotique d'une suite

Dans cette partie, si $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n le nombre entier $\lceil np - q \rceil$ et p_n le réel $\mathbb{P}(X_n = x_n)$

5 $\triangleright$ Justifier que p_n est le plus grand élément de $\{\mathbb{P}(X_n = k), k \in [\![0, n]\!]\}$.

6 $\triangleright$ Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n - x_n) = +\infty$.

Établir alors :

$$\sqrt{npq}\,p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi} x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}}$$

7 $\triangleright$ Montrer que, pour tout entier $n > \max\left\{\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right\}$:

$$\frac{n^n p^{x_n} q^{n-x_n}}{x_n^{x_n} (n-x_n)^{n-x_n}} = e^{-np\zeta\left(\frac{x_n-np}{np}\right) - nq\zeta\left(\frac{np-x_n}{nq}\right)}$$

8 $\triangleright$ Montrer que la suite $\left(\sqrt{npq}\,p_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Convergence en loi

Dans toute la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \frac{1}{\sqrt{npq}}(X_n - np)$ et on définit les réels $\tau_{n,k}$ par la relation :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \tau_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

9 $\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de Y_n et vérifier que Y_n est une variable aléatoire centrée réduite.

10 $\triangleright$ Justifier l'existence d'un élément $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\text{pour tout entier } n \geq N, \quad [a,b] \subset [\tau_{n,0}, \tau_{n,n}] \text{ et } \frac{1}{\sqrt{npq}} \leq b - a.$$

On définit les suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$k_n(t) = \lfloor \sqrt{npq}\,t + np \rfloor, \; e_n(t) = \tau_{n,k_n(t)}, \; f_n(t) = \sqrt{npq}\,\mathbb{P}(Y_n = e_n(t))$$

11 $\triangleright$ Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, e_n$ est une fonction en escalier croissante vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; e_n(t) \leq t < e_n(t) + \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

Démontrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction e que l'on précisera.

12 $\triangleright$ Montrer que :

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \Phi(t)dt$$

puis vérifier que

$$\mathbb{P}\left(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b)\right) = \int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)}+1} f_n(t)dt$$

13 $\triangleright$ Prouver que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$:

$$f_n\left(\tau_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{pqn^2}{k(n-k)}}\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}}\frac{1+\varepsilon_n}{\left(1+\varepsilon_k\right)\left(1+\varepsilon_{n-k}\right)}$$

où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie à la question 1 .

14 $\triangleright$ Justifier que, pour tout $t\in[a,b]$:

$$\sqrt{\frac{pqn^2}{k_n(t)\left(n-k_n(t)\right)}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \text{ et } \frac{1}{\left(1+\varepsilon_{k_n(t)}\right)\left(1+\varepsilon_{n-k_n(t)}\right)} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

15 $\triangleright$ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ tels que $\max\left\{\sqrt{\frac{q}{np}},\sqrt{\frac{p}{nq}}\right\}\times|\tau_{n,k}|<1$:

$$\frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} = e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right)-nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)}$$

16 $\triangleright$ Démontrer que :

$$\frac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)}\left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} \underset{n\to+\infty}{\to} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

17$\triangleright$ En conclure que :

$$\forall t\in[a,b],\ f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(t)$$

puis que :

$$\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \Phi(t)dt$$

Les 3/2 peuvent passer à la limite sous le signe intégrale sans justifications.

18 $\triangleright$ Déduire de tout ce qui précède que :

$$\mathbb{P}\left(e_n(a)\leq Y_n\leq e_n(b)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \Phi(t)dt$$

puis que :

$$\mathbb{P}\left(a\leq Y_n\leq b\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \Phi(t)dt$$

Applications

19 $\triangleright$ Montrer que :

$$\forall T\in\mathbb{R}_+^*, \int_{-T}^{T}\Phi(t)dt \geq 1-\frac{1}{T^2}$$

puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(t)dt$.

20 $\triangleright$ Les suites $\left(\mathbb{P}\left(Y_n\leq b\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et $\left(\mathbb{P}\left(Y_n\geq a\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles convergentes ? En 'préciser les limites éventuelles.

Généralisation

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que φ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \varphi \circ Y_n$.

21 $\triangleright$ Montrer que, si $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, il existe une unique fonction Ψ continue sur $\mathbb{R}$ telle que :
pour tout $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, si $\alpha \leq \beta$, alors $\mathbb{P}\left(\alpha \leq Z_n \leq \beta\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_\alpha^\beta \Psi(t)\mathrm{d}t$, ou $\overline{\mathbb{R}}$ désigne I'ensemble constitué des réels, de $-\infty$ et de $+\infty$.
Que dire si l'on ne suppose plus $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$?

FIN DU PROBLÈME