Notations et définitions

• Soient $\mathscr{B}$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions continues et bornées de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ et $\mathscr{B}^{\mathbf{R}}$ la sous-algèbre réelle des fonctions de $\mathscr{B}$ à valeurs réelles.

Pour f dans $\mathscr{B}^{\mathbf{R}}$ (resp. f dans $\mathscr{B}$), on note $\sup f = \sup\{f(x),\ x \in \mathbf{R}\}$ (resp. $\|f\|_\infty = \sup |f|$).
On rappelle que $(\mathscr{B},\ \|\ \|_\infty)$ est un espace normé.

Pour λ dans $\mathbf{R}$, soit e_λ l'élément de $\mathscr{B}$ défini par : $\forall t \in \mathbf{R},\quad e_\lambda(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}$.
On note $\mathscr{P}$ le sous-espace de $\mathscr{B}$ engendrée par $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ (espace des *polynômes trigonométriques à fréquences réelles*). On démontrera en **I**.A que $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ est une famille libre de $\mathscr{B}$, donc une base de $\mathscr{P}$. Ceci permet de définir une norme sur $\mathscr{P}$ en posant, pour toute famille presque nulle $(c_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ de complexes :

$$N\left(\sum_{\lambda\in\mathbf{R}} c_\lambda e_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} |c_\lambda|.$$

On a : $\forall p \in \mathscr{P},\quad \|p\|_\infty \leqslant N(p)$.

• Soit Λ une partie non vide de $\mathbf{R}$.
On note $\mathscr{P}_\Lambda$ le sous-espace de $\mathscr{P}$ engendré par $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.
On dit que Λ est un *ensemble de Sidon* si et seulement si N et $\|\ \|_\infty$ induisent des normes équivalentes sur $\mathscr{P}_\Lambda$, i.e, compte-tenu de l'inégalité précédente, si et seulement si l'ensemble :

$$\left\{\frac{N(p)}{\|p\|_\infty},\ p \in \mathscr{P}_\Lambda \setminus \{0\}\right\}$$

est majoré. Si tel est le cas, on pose :

$$K(\Lambda) = \sup\left\{\frac{N(p)}{\|p\|_\infty},\ p \in \mathscr{P}_\Lambda \setminus \{0\}\right\}$$

On note $\mathscr{P}_\Lambda^{\mathbf{R}}$ le sous-espace réel $\mathscr{P}_\Lambda \cap \mathscr{B}^{\mathbf{R}}$ de $\mathscr{P}_\Lambda$.
On dit que Λ est symétrique si et seulement si : $\forall x \in \Lambda,\ -x \in \Lambda$.
On dit que Λ est un *ensemble de Sidon réel* si et seulement si Λ est symétrique et s'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall p \in \mathscr{P}_\Lambda^{\mathbf{R}},\qquad N(p) \leqslant C \sup(p).$$

Si tel est le cas, on a en particulier :

$$\forall p \in \mathscr{P}_\Lambda^{\mathbf{R}} \setminus \{0\},\qquad \sup(p) > 0,$$

et on pose :

$$K'(\Lambda) = \sup\left\{\frac{N(p)}{\sup(p)}\ ,\ p \in \mathscr{P}_\Lambda^{\mathbf{R}} \setminus \{0\}\right\}.$$

• Soient I un ensemble non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels. On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est **Q**-*libre* si et seulement si, pour toute famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ de rationnels, on a :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i\, a_i = 0 \quad\Rightarrow\quad \forall i \in I,\ \lambda_i = 0.$$

Si $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas **Q**-libre, on dit que $(a_i)_{i\in I}$ est **Q**-*liée*.
Si A est une partie de $\mathbf{R}$, on dit que A est **Q**-libre si et seulement si la famille $(a)_{a\in A}$ est **Q**-libre.

• Enfin, si E est une partie de $\mathbf{R}$ et γ un réel, on note γE l'ensemble : $\{\gamma x,\ x \in E\}$.

Objectifs du problème, dépendance des parties

Le but essentiel du problème est de construire des solutions remarquables de l'équation des ondes sur la sphère euclidienne de $\mathbf{R}^3$, découvertes par Yves Meyer. La partie **I** établit quelques résultats préalables concernant les éléments de $\mathscr{P}$ et les polynômes de Legendre. La partie **II** est consacrée aux ensembles de Sidon. La partie **III** étudie un ensemble particulier d'irrationnels quadratiques. La partie **IV** utilise des techniques probabilistes pour obtenir des polynômes trigonométriques ayant des normes quadratique et uniforme assez proches. La partie **V** construit les fonctions désirées.
La partie **II** dépend uniquement de **I**.A. La partie **III** utilise les résultats de la partie **II**. La partie **IV** est indépendante des parties précédentes. La partie **V** utilise les résultats de la partie **I.B,** ainsi que ceux des questions **III.B**.3 et **IV.C**.2.

I. Préliminaires

A. Éléments de $\mathscr{P}$

1. (a) Soient $(c_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ une famille presque nulle de complexes, λ_0 un réel et $p = \sum_{\lambda\in\mathbf{R}} c_\lambda\, e_\lambda$. Démontrer que $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p(t)e_{-\lambda_0}(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers une limite à préciser lorsque $T \to +\infty$.
   (b) Démontrer que $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{R}}$ est une famille libre du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{B}$.
2. On suppose Λ symétrique.
   (a) Soit p dans $\mathscr{P}_\Lambda$. Vérifier que $\operatorname{Re} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont dans $\mathscr{P}_\Lambda^{\mathbf{R}}$.
   (b) On suppose que Λ est un ensemble de Sidon réel. Démontrer que Λ est un ensemble de Sidon.

B. Polynômes de Legendre

Si $n \in \mathbf{N}$, U_n désigne le polynôme $(X^2-1)^n$, P_n le polynôme $(U_n)^{(n)}$ (dérivée n-ième de U_n) et L_n le polynôme $\dfrac{P_n}{2^n n!}$.

1. Soient n dans $\mathbf{N}$ et x dans $[-1,1]$.
   (a) Soient r dans $\mathbf{R}^{+*}$ et γ le lacet défini par :
   $$\forall\theta\in[-\pi,\pi],\qquad \gamma(\theta) = x + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$
   Vérifier la relation :
   $$P_n(x) = \frac{n!}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\gamma(\theta)^2-1)^n}{(\gamma(\theta)-x)^{n+1}}\gamma'(\theta)\ \mathrm{d}\theta.$$
   (b) Déduire de a) :
   $$L_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x + \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}\ \sin\theta\right)^n\ \mathrm{d}\,\theta.$$
   Indication. Pour x dans $]-1,1[$, on pourra appliquer a) avec $r = \sqrt{1-x^2}$.
2. Si $n \in \mathbf{N}$, calculer $L_n(1)$, $L_n(-1)$ et $\sup\Big\{|L_n(x)|,\ x\in[-1,1]\Big\}$.
3. Soient η dans $]0,1[$ et $I_\eta = [-(1-\eta),\ 1-\eta]$.
   (a) Vérifier :
   $$\forall n\in\mathbf{N},\quad \forall x\in I_\eta,\qquad |L_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\eta\cos^2\theta\right)^{n/2}\ \mathrm{d}\theta.$$
   (b) Démontrer que $(L_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers 0 sur I_η.

C. Opérateurs différentiels

Soit V l'espace vectoriel complexe des applications de classe C^2 de $[-1,1]$ dans $\mathbf{C}$. Pour f dans V, soit $D(f)$ l'application de $[-1,1]$ dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad D(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x).$$

Si λ est dans $\mathbf{C}$, soit V_λ le sous-espace de V défini par : $V_\lambda = \{f \in V,\ D(f) = \lambda f\}$.
Enfin, soit : $\Sigma = \Big\{\lambda \in \mathbf{C},\ V_\lambda \neq \{0\}\Big\}$.

1. Soit n dans $\mathbf{N}$.
   (a) Vérifier la relation : $(X^2-1){U_n}' = 2nX\, U_n$.
   (b) En déduire l'égalité : $D(L_n) = -n(n+1)\, L_n$.
2. Soient f et g dans V. Démontrer l'égalité :
$$\int_{-1}^{1} D(f)(t)\ g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\ D(g)(t)\,\mathrm{d}t.$$

   2.bis Soit l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1-x^2)\ y''(x) - 2x\ y'(x) + n(n+1)\ y(x) = 0\ .$$

   On admet que l'ensemble des solutions sur $]-1,1[$ est un plan vectoriel. Pour deux solutions f et g sur $]-1,1[$ de cette équation on pose :

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} \text{ (wronskien de } f \text{ et } g).$$

   Soit $x_0 \in]-1,1[$, montrer que la famille (f,g) est libre si et seulement si $W(x_0) \neq 0$.
   Montrer que W est solution sur $]-1,1[$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. Démontrer que : $\Sigma = \{-n(n+1),\ n \in \mathbf{N}\}$.
4. Soit n dans $\mathbf{N}$. Démontrer que $V_{-n(n+1)} = \mathbf{C}\, L_n$.
   Indication. On pourra considérer le wronskien de deux solutions de l'équation différentielle (E).
5. Lorsqu'on cherche les solutions de l'équation des ondes sur la sphère euclidienne tridimensionnelle S^2 de $\mathbf{R}^3$ qui ne dépendent que d'une coordonnée, on est conduit à déterminer l'espace $\mathscr{E}$ des applications u de classe C^2 de $\mathbf{R} \times [-1,1]$ dans $\mathbf{C}$ telles que :

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R} \times [-1,1], \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = (1-x^2)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2x\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,x).$$

   Démontrer que les éléments de $\mathscr{E}$ de la forme : $(t,x) \mapsto a(t)\ b(x)$ où a (resp. b) est une application de classe C^2 de $\mathbf{R}$ (resp. $[-1,1]$) dans $\mathbf{C}$, sont les :

$$(t,x) \quad \mapsto \quad L_n(x)\ \left(\alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{n(n+1)}\,t} + \beta\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{n(n+1)}\,t}\right)$$

   avec $n \in \mathbf{N}^*$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbf{C}^2$, et les : $(t,x) \quad \mapsto \quad \lambda t + \mu$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbf{C}^2$.

II. Construction d'ensembles de Sidon

On note $\mathscr{C}$ la sous-algèbre de $\mathscr{B}$ constituée des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.

On admettra le théorème suivant :
L'ensemble $\mathcal{P}_{\mathbf{Z}}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}$, muni de la norme de la convergence uniforme (théorème de Weierstrass trigonométrique).

A. Théorème d'approximation de Kronecker et application

Soient n dans $\mathbf{N}^*$, $(\omega_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une famille de réels, ω l'élément $(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ de $\mathbf{R}^n$, G_ω le sous-groupe de $\mathbf{R}^n$ engendré par $\mathbf{R}\omega$ et $2\pi\mathbf{Z}^n$ c'est-à-dire :

$$G_\omega = \mathbf{R}\omega + 2\pi\mathbf{Z}^n = \{s\omega + 2\pi v,\ (s,v)\in\mathbf{R}\times\mathbf{Z}^n\}.$$

1. On suppose $(\omega_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ $\mathbf{Q}$-liée.
   (a) Démontrer qu'il existe une forme linéaire non identiquement nulle ℓ sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\ell(G_\omega)\subset\mathbf{Z}$.
   (b) Le sous-groupe G_ω est-il dense dans $\mathbf{R}^n$?
2. On suppose $(\omega_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ $\mathbf{Q}$-libre. Si $f_1,\ldots,f_n$ sont dans $\mathscr{C}$ et $T>0$, on pose :
$$J_T(f_1,\ldots,f_n) = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\prod_{j=1}^n f_j\left(\omega_j t\right)\right)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Si $f_1,\ldots,f_n$ sont dans $\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}$, démontrer :
$$J_T(f_1,\ldots,f_n)\ \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow}\ \prod_{j=1}^n\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
   (b) Si $f_1,\ldots,f_n$ sont dans $\mathscr{C}$, démontrer :
$$J_T(f_1,\ldots,f_n)\ \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow}\ \prod_{j=1}^n\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
   (c) Démontrer que G_ω est dense dans $\mathbf{R}^n$.
3. On suppose $(\omega_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ $\mathbf{Q}$-libre. Soient $(g_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une famille d'éléments de $\mathscr{C}$ à valeurs réelles et g la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :
$$\forall t\in\mathbf{R},\qquad g(t)=\sum_{j=1}^n g_j(\omega_j\ t).$$
   Établir la relation : $\sup(g)=\displaystyle\sum_{j=1}^n\sup(g_j)$.
4. Soient Γ une partie non vide $\mathbf{Q}$-libre de $\mathbf{R}$ et c dans $\mathbf{R}^{+*}$. Pour tout γ de Γ, soit Λ_γ un ensemble de Sidon réel contenu dans $\mathbf{Z}^*$ et tel que $K'(\Lambda_\gamma)\leqslant c$. On définit $\Lambda=\displaystyle\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\,\Lambda_\gamma$.

   Démontrer que Λ est un ensemble de Sidon réel et que $K'(\Lambda)\leqslant c$.

B. Parties dissociées de Z

Soit Λ une partie infinie et symétrique de $\mathbf{Z}^*$. On peut donc écrire :
$$\Lambda=\{\lambda_j,\ j\geqslant 1\}\cup\{-\lambda_j,\ j\geqslant 1\},$$
où $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbf{N}^*$. On dit que Λ est dissociée si et seulement si, pour tout n de $\mathbf{Z}$, il existe au plus une suite presque nulle $(\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}$ d'éléments de $\{0,-1,1\}$ telle que :
$$n=\sum_{j\geqslant 1}\varepsilon_j\ \lambda_j.$$
Si f est dans $\mathscr{C}$ et n dans $\mathbf{Z}$, on note :
$$\hat f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\ \mathrm{d}t.$$
On pourra utiliser sans démonstration le fait suivant :
Soient f et g des éléments de $\mathcal{C}$. Alors :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar f g=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\overline{\hat f(n)}\hat g(n).$$

1. Dans cette question, on suppose Λ dissociée. Soient $\varphi = (\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ une suite réelle et, pour k dans $\mathbf{N}^*$, R_k^φ l'élément de $\mathscr{P}_\mathbf{Z}$ défini par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad R_k^\varphi(t) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \cos\left(\lambda_j t + \varphi_j\right)\right).$$

   (a) Soient k et m dans $\mathbf{N}^*$ avec $m \leqslant k$. Calculer : $\widehat{R_k^\varphi}(0)$, $\widehat{R_k^\varphi}(\lambda_m)$ et $\widehat{R_k^\varphi}(-\lambda_m)$.

   (b) Soit p dans $\mathscr{P}_\Lambda^\mathbf{R}$. Démontrer que l'on peut déterminer k et φ de façon à avoir :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)\, R_k^\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{m\geqslant 1} |\widehat{p}(\lambda_m)|\,.$$

   (c) Démontrer que Λ est un ensemble de Sidon réel et que $K'(\Lambda) \leqslant 2$.

2. On suppose que pour tout entier j strictement positif, on a : $\lambda_{j+1} \geqslant 3\lambda_j$.

   Démontrer que Λ est dissociée.

III. Un ensemble de Sidon d'irrationnels quadratiques

On note Q l'ensemble des éléments de $\mathbf{N}^*$ qui ne sont divisibles par aucun carré de nombre premier. En d'autres termes, les élément de Q sont 1 et les produits $p_1 \times \cdots \times p_r$ où $r \in \mathbf{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_r$ sont r nombres premiers distincts.

A. Équation de Pell-Fermat

1. (a) Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$. On suppose que 0 est un point isolé de $G \cap \mathbf{R}^+$. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}^+$ tel que $G = c\mathbf{Z}$.

   (b) Décrire les sous-groupes de $(\mathbf{R}^{+*}, \times)$ tels que 1 soit un point isolé de $G \cap [1, +\infty[$.

2. Soit m dans $\mathbf{N}^*$.

   (a) Soit (x, y) dans $\mathbf{Z}^2$ tel que $x + y\sqrt{m} > 1$ et $x^2 - my^2 = 1$.

   Ranger par ordre croissant les réels $x+y\sqrt{m}$, $x-y\sqrt{m}$, $-x+y\sqrt{m}$; en déduire : $x+y\sqrt{m} \geqslant 1 + \sqrt{m}$.

   (b) Soit $G_m = \left\{x + y\sqrt{m} \;\middle|\; (x, y) \in \mathbf{Z}^2,\ x + y\sqrt{m} > 0,\ x^2 - my^2 = 1\right\}$.

   Démontrer que G_m est soit réduit à $\{1\}$, soit de la forme $\{{\gamma_m}^n,\ n \in \mathbf{Z}\}$ pour un certain $\gamma_m \geqslant 1 + \sqrt{m}$.

   On peut prouver que $G_m = \{1\}$ si et seulement si m est le carré d'un entier ; cette précision est inutile dans la suite.

3. Pour q dans Q, soit $A_q = \left\{\lambda \in \mathbf{N}^* \;\middle|\; \exists n \in \mathbf{N}^*,\ n(n + 1) = q\,\lambda^2\right\}$.

   Montrer que A_q est soit vide, soit de la forme : $\{\lambda_{j,q},\ j \geqslant 1\}$ où $(\lambda_{j,q})_{j\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{N}^*$ telle que :
$$\forall j \geqslant 1, \qquad \lambda_{j+1,q} \;\geqslant\; (1 + 2\sqrt{q})\;\lambda_{j,q}.$$

   Indication. La relation $n(n + 1) = q\,\lambda^2$ équivaut à $(2n + 1)^2 - 4q\,\lambda^2 = 1$.

B. Indépendance des racines carrées des entiers sans facteur carré et application

Si K est un sous-corps de $\mathbf{R}$, m un élément de $\mathbf{N}$, $a_1, \ldots, a_m$ des réels, on note $K(a_1, \ldots, a_m)$ le plus petit sous-corps de $\mathbf{R}$ contenant K et $a_1, \ldots, a_m$; si $m = 0$, ce corps est égal à K.

1. Soient K un sous-corps de $\mathbf{R}$, a et b dans $K \cap \mathbf{R}^{+*}$ tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ n'appartiennent pas à K. Démontrer l'équivalence :

$$\sqrt{b} \ \in \ K(\sqrt{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \ \in \ K.$$

2. (a) Démontrer par récurrence sur $m \in \mathbf{N}$ l'assertion suivante :
   « Si $n \in \mathbf{N}^*$, si $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n$ sont $m + n$ nombres premiers distincts, alors $\sqrt{q_1 \cdots q_n}$ n'appartient pas à $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_m})$ ».

   (b) Démontrer que la famille $(\sqrt{q})_{q \in Q}$ est $\mathbf{Q}$-libre.

3. Soit :
$$\Lambda = \left\{\sqrt{n(n+1)},\ n \in \mathbf{N}^*\right\} \cup \left\{-\sqrt{n(n+1)},\ n \in \mathbf{N}^*\right\}.$$
   Démontrer que Λ est un ensemble de Sidon réel et que $K'(\Lambda) \leqslant 2$.

IV. Polynômes trigonométriques aléatoires

Soient n dans $\mathbf{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathbf{C}^n$ et p l'élément de $\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}$ défini par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad p(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt}.$$

A. Inégalité de Bernstein faible

1. Établir la majoration :

$$\|p'\|_\infty \leqslant \frac{n(n+1)}{2} \|p\|_\infty.$$

   On peut prouver l'inégalité optimale : $\|p'\|_\infty \leqslant n \|p\|_\infty$; ce raffinement est inutile ici.
   On pose désormais $\alpha_n = n(n+1)/2$.

2. Démontrer qu'il existe un segment S de $\mathbf{R}$ de longueur $1/\alpha_n$ tel que : $\forall t \in S,\ |p(t)| \geqslant \dfrac{\|p\|_\infty}{2}$.

Dans la suite de cette partie **IV**, Ω est l'ensemble des n-uplets $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ tels que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad \omega_k \in \{-1, 1\}.$$

On munit Ω de la probabilité uniforme notée P. L'espérance d'une variable aléatoire réelle X définie sur Ω est notée $E(X)$.
Si $1 \leqslant k \leqslant n$, soit X_k la variable aléatoire définie sur Ω par :

$$X_k(\omega) = \omega_k \qquad \text{si} \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n).$$

On rappelle que $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi donnée par :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On fixe λ dans $\mathbf{R}^{+*}$.

B. Majoration d'une espérance

1. Démontrer que, pour tout x réel, $\operatorname{ch} x \leqslant e^{x^2/2}$.

   Indication. On pourra utiliser un développement en série entière.

   Soit $Z = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

2. Calculer $E\left(e^{\operatorname{Re} Z}\right)$.

3. (a) Démontrer l'inégalité : $E\left(e^{\lambda |\operatorname{Re} Z|}\right) \leqslant 2 \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Re} a_k)^2\right)$.

   (b) Démontrer l'inégalité : $E\left(e^{\lambda |Z|}\right) \leqslant 2 \exp\left(\lambda^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)$.

C. Un résultat de Salem et Zygmund

Pour ω dans Ω, soit p_ω l'élément de $\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}$ défini par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad p_\omega(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(\omega) e^{ikt}.$$

Pour t dans $\mathbf{R}$, soit Z_t la variable aléatoire définie par :

$$\forall w \in \Omega, \qquad Z_t(\omega) = p_\omega(t).$$

Soit enfin M la variable aléatoire donnée par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad M(\omega) = \|p_\omega\|_\infty.$$

1. (a) Pour ω dans Ω, démontrer l'inégalité :
$$\frac{1}{\alpha_n} \exp\left(\frac{\lambda M(\omega)}{2}\right) \leqslant \int_0^{2\pi} \exp\left(\lambda\left|Z_t(\omega)\right|\right)\, \mathrm{d}t.$$
   (b) Démontrer l'inégalité :
$$E\left(\exp\left(\frac{\lambda M}{2}\right)\right) \leqslant 4\pi\alpha_n \exp\left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right).$$
2. (a) Démontrer qu'il existe ω dans Ω tel que :
$$M(\omega) \leqslant 2\left(\frac{\ln(4\pi\alpha_n)}{\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right).$$
   (b) Conclure qu'il existe ω dans Ω tel que :
$$M(\omega) \leqslant 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n) \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}.$$

   En choisissant $(a_1, \ldots, a_n) = (1, \ldots, 1)$, on obtient ainsi $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ dans $\{\pm 1\}^n$ tel que :
$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \delta_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right| \leqslant 4\sqrt{n \ln(4\pi\alpha_n)}.$$
   C'est uniquement ce résultat qui sera utilisé dans la partie **V**.
3. Soit Λ un ensemble de Sidon contenu dans $\mathbf{Z}$. Montrer :
$$|\Lambda \cap \{1, \ldots, n\}| \leqslant 16\, K(\Lambda)^2 \ln(4\pi\alpha_n).$$

V. Vibrations des sphères

Pour n dans $\mathbf{N}^*$, soit $(\delta_{k,n})_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite d'éléments de $\{-1, 1\}$ possédant la propriété énoncée en **IV**.C.2 : « si $R_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,n} X^k$, alors $\sup\left\{\left|R_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})\right|,\ u \in \mathbf{R}\right\} \leqslant 4\sqrt{n \ln(4\pi\alpha_n)}$ ».

Pour t dans $\mathbf{R}$ et x dans $[-1, 1]$, soit : $u_n(t, x) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,n}\, L_k(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k(k+1)}t}$.

D'après **I**.C.5, u_n appartient à $\mathscr{E}$. On se propose d'établir, pour n grand, certaines propriétés asymptotiques de u_n.
On fixe ε et T dans $\mathbf{R}^{+*}$, η dans $]0, 1[$; I_η a la même signification qu'en **I**.B.

1. Démontrer qu'il existe N dans $\mathbf{N}^*$ tel que :
$$(1) \qquad \forall n \geqslant N, \quad \forall (t, x) \in \mathbf{R} \times I_\eta, \qquad |u_n(t, x)| \leqslant \varepsilon.$$
2. Indiquer une constante absolue m appartenant à $\mathbf{R}^{+*}$ telle que :
$$(2) \qquad \sup\{|u_n(t, 1)|,\ t \in \mathbf{R}\} \geqslant m \quad \text{et} \quad \sup\{|u_n(t, -1)|,\ t \in \mathbf{R}\} \geqslant m.$$
3. Pour t dans $\mathbf{R}$ et x dans $[-1, 1]$, soit : $v_n(t, x) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,n}\, L_k(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k+1)t/2}$.
   (a) Démontrer la majoration : $\forall (t, x) \in \mathbf{R} \times [-1, 1], \quad |v_n(t, x)| \leqslant \dfrac{1}{n} \sup\left\{|R_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})|,\ u \in \mathbf{R}\right\}$.
   (b) Déduire de a) l'existence de N' dans $\mathbf{N}$ tel que :
$$(3) \qquad \forall n \geqslant N', \quad \forall (t, x) \in [-T, T] \times [-1, 1], \qquad |u_n(t, x)| \leqslant \varepsilon.$$

On obtient ainsi des solutions de l'équation des ondes sur la sphère unité S^2 de $\mathbf{R}^3$, ne dépendant que d'une coordonnée, uniformément petites sur tout compact ne contenant pas les pôles (relation (1)), uniformément petites sur la sphère en temps fini (relation (3)), mais prenant de grandes valeurs aux pôles à certains instants (relation (2)).