La loi du demi-cercle

Notations

- Pour tous entiers naturels p et q tels que $p \leqslant q$ on note $[\![p, q]\!]$ l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leqslant i \leqslant q\}$.
- Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients réels, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et à coefficients réels de taille n et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles orthogonales de taille n.
- Pour toute matrice symétrique réelle $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ on note $\lambda_1(\mathrm{M}) \geqslant \lambda_2(\mathrm{M}) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(\mathrm{M})$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant.
- On note $\mathrm{M}^\top$ la transposée d'une matrice M.
- Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note E_{ij} la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la i-ème ligne et la j-ième colonne qui vaut 1 .
- Pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\mathrm{M}\mathrm{M}^\top\right)}$ sa norme euclidienne canonique.
- Dans tout le problème, on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω.
- Étant donnée une variable aléatoire discrète X à valeurs réelles admettant une espérance, on note $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ son espérance. Si X admet une variance, on note $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ sa variance.

Problématique

En essayant d'expliquer la répartition des niveaux d'énergie des noyaux des atomes lourds, Eugène Wigner a été amené, dans les années 1950, à étudier le spectre de matrices symétriques réelles aléatoires de grande taille. La figure 1 montre un histogramme qui représente la répartition des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle de taille $n = 2500$ constituée de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, d'espérance nulle et de variance égale à 1.

graphsujet1.pdf

On voit que les valeurs propres se répartissent suivant un profil en demi-cercle de rayon $2\sqrt{n}$. En normalisant par un facteur $1/\sqrt{n}$ on obtient le profil d'un demi-cercle de rayon 2.

Plus précisément, on considère $(\mathrm{X}_{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ une famille de variables aléatoires discrètes réelles telles que

- pour tout $(i,j)\in(\mathbb{N}^\star)^2$, $\mathrm{X}_{ij}=\mathrm{X}_{ji}$;
- les variables aléatoires X_{ij} sont de même loi, d'espérance nulle et de variance 1 ;
- pour $n\geqslant 1$, les variables aléatoires X_{ij}, pour $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $\omega\in\Omega$, on note $\mathrm{M}_n(\omega)$ la matrice $(\mathrm{X}_{ij}(\omega))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $\omega\in\Omega$, on note $\Lambda_{1,n}(\omega)\geqslant\cdots\geqslant\Lambda_{n,n}(\omega)$ les valeurs propres de $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{M}_n(\omega)$.

On définit ainsi, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $i\in[\![1,n]\!]$, des variables aléatoires réelles discrètes $\Lambda_{i,n}$ sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

On se propose de montrer le résultat suivant :

Loi du demi-cercle

Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue et bornée,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right)\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Dans la partie I, on établit une inégalité portant sur les valeurs propres d'un couple de matrices symétriques. La partie II est consacrée à la résolution d'un problème de dénombrement qui est utilisée dans la partie III où la loi du demi-cercle est démontrée pour des variables aléatoires uniforménent bornées. Dans la partie IV, on établit la loi du demi-cercle dans le cas général en utilisant les résultats des parties I et III.

I Inégalité de Hoffman-Wielandt

***I.A* -** Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Q 1. Montrer que, pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous P et Q dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|\mathrm{PMQ}\|_{\mathrm{F}} = \|\mathrm{M}\|_{\mathrm{F}}$.

Q 2. On note $\mathrm{D_A} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1(\mathrm{A}), \dots, \lambda_n(\mathrm{A})\right)$ et $\mathrm{D_B} = \mathrm{diag}\left(\lambda_1(\mathrm{B}), \dots, \lambda_n(\mathrm{B})\right)$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathrm{P} = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telle que $\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2 = \|\mathrm{D_A P} - \mathrm{P D_B}\|_{\mathrm{F}}^2$

Q 3. Montrer que

$$\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} p_{i,j}^2 \left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2$$

***I.B* -** On note $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{j=1}^n m_{j,i} = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

On note $f \ : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} \left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{B})\right)^2 \end{array} \right.$.

Q 4. Justifier que f admet un minimum sur $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que ce minimum est atteint en la matrice identité.

Q 5. Soit $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$ tel que $j \geqslant i$ et $k \geqslant i$. Montrer que, pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f\left(\mathrm{M} + x\mathrm{E}_{ii} + x\mathrm{E}_{jk} - x\mathrm{E}_{ik} - x\mathrm{E}_{ji}\right) - f(\mathrm{M}) = 2x\left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_j(\mathrm{A})\right)\left(\lambda_k(\mathrm{B}) - \lambda_i(\mathrm{B})\right) \leqslant 0$$

Q 6. Soient $n \geqslant 2$ et $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\in n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ une matrice différente de l'identité. On note i le plus petit entier appartenant à $[\![1,n]\!]$ tel que $m_{i,i} \neq 1$. Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{M}' = \left(m'_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ telle que $f\left(\mathrm{M}'\right) \leqslant f(\mathrm{M})$ et $m'_{j,j} = 1$ pour tout $j \in [\![1,i]\!]$.

Q 7. En déduire que

$$\min\left\{f(\mathrm{M}) \mid \mathrm{M} \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})\right\} = f\left(\mathrm{I}_n\right)$$

***I.C* -**

Q 8. En déduire que

$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})^2, \quad \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i(\mathrm{A}) - \lambda_i(\mathrm{B})\right)^2 \leqslant \|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|_{\mathrm{F}}^2$$

II Dénombrement des mots bien parenthésés

Dans cette partie, on s'intéresse à des chaînes de caractères constituées uniquement des deux caractères parenthèse ouvrante et parenthèse fermante. On dit qu'un mot est *bien parenthésé* s'il commence par une parenthèse ouvrante et qu'à toute parenthèse ouvrante est associée une (unique) parenthèse fermante *qui lui est postérieure*. Par exemple le mot

$$()(())$$

est bien parenthésé. En revanche, le mot

$$())()$$

n'est pas bien parenthésé. Un mot bien parenthésé est ainsi forcément constitué d'un nombre pair de caractères, chaque parenthèse qui s'ouvre doit se refermer.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note C_n le nombre de mots bien parenthésés de longueur $2n$. On pose par commodité $\mathrm{C}_0 = 1$.

***II.A* -**

Q 9. En énumérant les différents mots bien parenthésés de longueur 2, 4 et 6, montrer que $\mathrm{C}_1 = 1, \mathrm{C}_2 = 2$ et déterminer C_3.

Q 10. Montrer que, pour tout entier naturel $n, \mathrm{C}_n \leqslant 2^{2n}$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{C}_k x^k$?

Q 11. Montrer par un raisonnement combinatoire que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathrm{C}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{C}_i \mathrm{C}_{k-i-1}$$

On peut remarquer qu'un mot bien parenthésé est forcément de la forme $(m)m'$ avec m et m' deux mots bien parenthésés, éventuellement vides.

***II.B* -** Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, on pose $\mathrm{F}(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{C}_k x^k$.

Q 12. Montrer que, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \mathrm{F}(x) = 1 + x(\mathrm{F}(x))^2$.

Q 13. Montrer que la fonction $f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x\mathrm{F}(x) - 1 \end{array} \right.$ ne s'annule pas.

Q 14. Déterminer, pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, une expression de $\mathrm{F}(x)$ en fonction de x.

Q 15. Déterminer le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \sqrt{1-u}$. On écrira les coefficients sous la forme d'un quotient de factorielles et de puissances de 2.

Q 16. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

III Loi du demi-cercle, cas uniformément borné

On suppose, uniquement dans cette partie, que les variables aléatoires X_{ij} sont uniformément bornées :

$$\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R},\ \forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ |\mathrm{X}_{ij}| \leqslant \mathrm{K}.$$

***III.A* -** Pour tout entier naturel k on pose

$$m_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^k \sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x$$

Q 17. Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut m_{2k+1} ?

Q 18. En utilisant le changement de variable $x = 2\sin t$, calculer m_0.

Q 19. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel k,

$$m_{2k+2} = \frac{2(2k+1)}{k+2} m_{2k}$$

Q 20. En déduire que

$$m_k = \begin{cases} \mathrm{C}_{k/2} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

***III.B* -** Soit k un entier naturel. On se propose de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = m_k,$$

où $\Lambda_{i,n}^k = (\Lambda_{i,n})^k$ est la puissance k-ième de $\Lambda_{i,n}$.

Q 21. Justifier que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k$ admet une espérance et que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}}\mathbb{E}\left(\operatorname{tr}\left(\mathrm{M}_n^k\right)\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in[\![1,n]\!]^k} \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1 i_2}\mathrm{X}_{i_2 i_3}\cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k}\mathrm{X}_{i_k i_1}\right).$$

On appelle *cycle* de longueur k à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, tout $(k+1)$-uplet $\vec{\imath} = (i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ d'éléments de $[\![1,n]\!]$. Les éléments $i_1, \dots, i_k$ sont appelés *sommets* du cycle $\vec{\imath}$. On dit aussi que le cycle *passe* par ces sommets. On note $|\vec{\imath}|$ le nombre de sommets distincts du cycle $\vec{\imath}$.

On appelle *arêtes* du cycle $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ les couples non ordonnés (l'ordre des deux éléments de chaque couple n'est pas significatif) $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_1)$.

Par exemple $\vec{\imath} = (1,3,5,3,2,2,1)$ est un cycle de longueur 6 dans $[\![1,5]\!]$. Les sommets de ce cycle sont les éléments $1, 2, 3$ et 5, donc $|\vec{\imath}| = 4$. Les arêtes distinctes de ce cycle sont $(1,3), (3,5), (3,2), (2,2)$ et $(2,1)$. Les arêtes $(3,5)$ et $(5,3)$ sont les mêmes.

Q 22. Montrer que le nombre de cycles de longueur k dans $[\![1,n]\!]$ passant par ℓ sommets distincts est inférieur ou égal à $n^\ell \ell^k$.

Q 23. En déduire que

$$\frac{1}{n^{1+k/2}} \sum_{\substack{\vec{\imath}\in[\![1,n]\!]^k \\ |\vec{\imath}|\leqslant (k+1)/2}} \left|\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1 i_2}\mathrm{X}_{i_2 i_3}\cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k}\mathrm{X}_{i_k i_1}\right)\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

On classe les cycles de longueur k en trois sous-ensembles :

— l'ensemble $\mathcal{A}_k$, constitué des cycles où au moins une arête n'apparaît qu'une fois ;

— l'ensemble $\mathcal{B}_k$, constitué des cycles où toutes les arêtes apparaissent exactement deux fois ;

— l'ensemble $\mathcal{C}_k$, constitué des cycles où toutes les arêtes apparaissent au moins deux fois et il en existe au moins une qui apparaît au moins trois fois.

Q 24. Montrer que, si le cycle $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ appartient à $\mathcal{A}_k$, alors

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{i_1 i_2}\mathrm{X}_{i_i i_3}\cdots \mathrm{X}_{i_{k-1} i_k}\mathrm{X}_{i_k i_1}\right) = 0$$

Q 25. Montrer que, pour tout cycle $\vec{\imath}$ appartenant à $\mathcal{C}_k$, $|\vec{\imath}| \leqslant \frac{k+1}{2}$.

Q 26. Que peut-on dire de $\mathcal{B}_k$ si k est impair ? En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = 0$ dans ce cas.

On suppose dans la suite que k est pair et que $\vec{\imath} \in \mathcal{B}_k$ est un cycle passant par $\frac{k}{2}+1$ sommets distincts. Autrement dit $|\vec{\imath}| = \frac{k}{2}+1$.

On parcourt les arêtes de $\vec{\imath}$ dans l'ordre. À chaque arête de $\vec{\imath}$ on associe une parenthèse ouvrante si cette arête apparaît pour la première fois et une parenthèse fermante si elle apparaît pour la deuxième fois. Par exemple, au cycle $(1,3,2,3,1)$ correspond $(\,(\,)\,)$, au cycle $(1,2,1,3,1)$ correspond $(\,)\,(\,)$.

Q 27. Justifier que l'on obtient ainsi un mot bien parenthésé de longueur k.

Q 28. Dénombrer les cycles $\vec{\imath}$ qui correspondent à un mot bien parenthésé fixé.

Q 29. Déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \mathrm{C}_{k/2}$$

III.C -

Q 30. En déduire que, pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \mathrm{P}(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

III.D - Soit $\mathrm{A} > 2$.

Q 31. Montrer que, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) \leqslant \frac{1}{\mathrm{A}^{p+2q}}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} |\Lambda_{i,n}|^{2(p+q)}\right)$$

Q 32. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |\Lambda_{i,n}|^p\right) = 0$$

Q 33. Soient f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et P un polynôme de degré p. Justifier qu'il existe une constante K telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left]-\mathrm{A},\mathrm{A}\right[,\ |f(x)-\mathrm{P}(x)| \leqslant \mathrm{K}|x|^p$$

Q 34. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ |\Lambda_{i,n}|\geqslant \mathrm{A}}} |f-\mathrm{P}|\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) = 0$$

III.E -

Q 35. Soit f une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

IV Loi du demi-cercle, cas général

On revient au cas général. On note $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ la variable aléatoire indicatrice d'un événement A.
Pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et pour tout $\mathrm{C} > 0$, on pose

$$\sigma_{ij}(\mathrm{C}) = \sqrt{\mathbb{V}\left(\mathrm{X}_{ij}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_{ij}|\leqslant \mathrm{C}}\right)}$$

Si $\sigma_{ij}(\mathrm{C}) \neq 0$, on pose

$$\widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C}) = \frac{1}{\sigma_{ij}(\mathrm{C})}\left(\mathrm{X}_{ij}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_{ij}|\leqslant \mathrm{C}} - \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{ij}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_{ij}|\leqslant \mathrm{C}}\right)\right)$$

IV.A -

Q 36. Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}|\leqslant \mathrm{C}}\right) \xrightarrow{\mathrm{C}\to+\infty} \mathbb{E}(\mathrm{X})$$

Q 37. En déduire que

$$\lim_{\mathrm{C}\to+\infty} \sigma_{ij}(\mathrm{C}) = 1$$

Q 38. Justifier que, pour C assez grand, les variables $\widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C})$ sont bien définies et qu'elles sont alors bornées, centrées, de variance 1 et qu'elles sont mutuellement indépendantes pour $1 \leqslant i \leqslant j$.

Q 39. Montrer que

$$\mathrm{X}_{ij} - \widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C}) = \left(1 - \frac{1}{\sigma_{ij}(\mathrm{C})}\right)\mathrm{X}_{ij} + \frac{1}{\sigma_{ij}(\mathrm{C})}\left(\mathrm{X}_{ij}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_{ij}|>\mathrm{C}} - \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_{ij}\mathbb{1}_{|\mathrm{X}_{ij}|>\mathrm{C}}\right)\right)$$

Q 40. Montrer que

$$\lim_{\mathrm{C}\to+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\mathrm{X}_{ij} - \widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C})\right)^2\right) = 0$$

IV.B - Pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$, on note $\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C}) = \left(\widehat{\mathrm{X}}_{ij}(\mathrm{C})\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\widehat{\Lambda}_{1,n}(\omega) \geqslant \ldots \geqslant \widehat{\Lambda}_{n,n}(\omega)$ les valeurs propres de $\frac{1}{\sqrt{n}}\widehat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})(\omega)$ rangées dans l'ordre décroissant.

On obtient ainsi des variables aléatoires réelles discrètes $\widehat{\Lambda}_{1,n}, \ldots, \widehat{\Lambda}_{n,n}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne.

41. Montrer que

$$\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\widehat{\Lambda}_{i,n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{\mathrm{K}}{n}\mathbb{E}\left(\left\|\mathrm{M}_n - \widehat{\mathrm{M}}_n(\mathrm{C})\right\|_{\mathrm{F}}\right)$$

Q 42. On suppose de plus f bornée. Montrer

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\Lambda_{i,n}\right)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

IV.C -

Q 43. Montrer la loi du demi-cercle dans le cas général.

• • • FIN • • •