Question III.B

21. Pour une matrice diagonalisable (trigonalisable suffit), la trace est la somme des valeurs propres. Par ailleurs, si $M \sim \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors $M^k \sim \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$.
On en déduit ici que

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k = \mathrm{Tr}((M_n/\sqrt{n})^k) = \frac{1}{n^{k/2}} \mathrm{Tr}(M_n^k).$$

Or, les coefficients de M_n étant des fonctions bornées, il en va de même de ceux de M_n^k (à k fixé, la borne dépend de k) et donc de la trace de M_n^k. En tant que variable bornée,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k \text{ admet une espérance}}$$

Avec ce qui précède

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,n}^k\right) = \frac{1}{n^{1+k/2}} \mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M_n^k))}$$

D'après la formule du produit matriciel, (faire une récurrence),

$$(A^k)_{i,j} = \sum_{i_2,\ldots,i_k} A_{i,i_2} A_{i_2,i_3} \ldots A_{i_{k-1},i_k} A_{i_k,j}$$

etc.
22. Il y a $\binom{n}{\ell}$ façons de choisir ℓ sommets distincts. Une fois ces sommets choisis, un cycle de longueur k ne pouvant passer que par ces sommets est caractérisé par un k-uplet de ces sommets et il y a ℓ^k choix. Le nombre de cycles de longueur k passant par ℓ sommets distincts est donc plus petit que $\binom{n}{\ell}\ell^k$ (pas forcément égalité car on ne passe pas forcément par tous les sommets pour les cycles comptés). Comme $\binom{n}{\ell} \leq n^\ell$, ...