Correction du DM n$^{\text{o}}$11

Préparation aux oraux

Pour le 19 Mars

1. Voir cours.... On peut aussi lâchement vérifier que la fonction proposée est bien solution en utilisant le théorème, dit fondamental de l'ananlyse.

2. (a) Notons $(\mathbf{P}_n)$ la propriété

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, |f_n(t)| \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{K^n(t)}{n!}.$$

• On a $f_0 = \alpha \cos_{|\mathbf{R}_+} + \beta \sin_{|\mathbf{R}_+}$, donc en notant ϕ un argument de $\alpha + \mathrm{i}\beta$, pour tout réel $t \geq 0$,

$$f_0(t) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(t-\phi),$$

si bien que $|f_0(t)| \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ et que donc $(\mathbf{P}_1)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $(\mathbf{P}_n)$ est vraie. Grâce à 1, pourtout $t \in \mathbf{N}$,

$$f_{n+1}(t) = \int_0^t \sin(t-s) - q(s)f_n(s)\mathrm{d}s.$$

Donc pour tout réel $t \geq 0$,

$$|f_{n+1}(t)| \leq \int_0^t |q(s)||f_n(s)|\mathrm{d}s \leq \int_0^t K'(s)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{K^n(t)}{n!}\mathrm{d}s = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{K^{n+1}(t)}{n+1!}.$$

D'où $(\mathbf{P}_{n+1})$

Donc la propriété $(\mathbf{P}_k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$, par le principe de récurrence.

Soit $t \in \mathbf{R}_+$ la série entière $\sum \frac{K^n(t)}{n!}z^n$ a comme rayon de convergence $+\infty$ et somme $\exp(K(t)z)$, (série exponentielle), donc par $(\mathbf{P}_n)$ la série entière $\sum f_n(t)z^n$ a un rayon supérieur ou égal à la précédente donc égal à $+\infty$.

(b) Supposons un instant que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ et que l'on puisse dériver sous le signe somme deux fois terme à terme. Alors clairement $f(0) = f_0(0) = \alpha$ et $f'(0) = f_0'(0) = \beta$, et de plus par téléscopage, pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$f''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n''(t)\gamma^n = -f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} -f_n(t)\gamma^n + q(t)f_{n-1}(t)\gamma^n = -f(t) - \gamma q(t)f(t)\,;$$

donc f est solution de (1) et donc du problème de Cauchy.

Justifions que f est bien de classe $\mathcal{C}^2$. Mais avant donnons quelques majorations.

De (a) et de l'équation différentielle satisfaite par les f_n, vient pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$ que :

$$|f_n''(t)| \leq |f_n(t) - q(t)f_{n-1}(t)| \leq |f_n(t)| + k(t)|f_{n-1}(t)| \leq A\frac{K^n(t)}{n!} + A\frac{K'(t)K^{n-1}(t)}{n-1!}, \tag{1}$$

où l'on a posé $A := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, puis par intégration, comme $f_n'(0) = 0$ et comme K croît (dérivée positive),

$$|f'n(t)| \leq A\frac{K(t)^n t}{n\,!} + A\frac{K^n\,(t)}{n\,!} \leq A(t+1)\frac{(K(t)^n(t)}{n\,!}. \tag{2}$$

• Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on $\gamma^n f_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$

• Nous vîmes en (a) que la série $\sum \gamma^n f_n$ convergeait simplement.

• Pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, la série de terme général $A(t+1)\frac{(\gamma(K(t)(t))^n}{n\,!}$ converge absolument, comme série exponentielle, et donc par (2) la série $\sum f_n'(t)$ converge absolument, et donc $\sum f_n'$ converge simplement.

• Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$, pour tout n et tout $t \in [0, a]$ on a par (1),

$$|\gamma^n f_n''(t)| \leq A\frac{\gamma^n K^n(a)}{n\,!} + A \sup_{s\in[0,a]} K'(s)\frac{\gamma^n K^{n-1}\,(a)}{n-1\,!}$$

Or La série $\sum A\frac{(\gamma K(a))^n}{n\,!} + A \sup\limits_{s\in[0,a]} K'(s)\gamma\frac{(\gamma K^{n-1})^{n-1}(a)}{n-1\,!}$ converge comme somme de deux séries de type exponentiel, donc la série $\gamma^n f_n''$ converge normalement donc uniformément sur $[0, a]$.

Tout point de $\mathbf{R}_+$ ayant un voisinage relativement à $\mathbf{R}_+$ du type $[0, a]$, les trois points précédents assurent que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que ses dérivées s'obtiennent en dérivant termes à termes.

Conclusion : la fonction f est l'unique solution sur $\mathbf{R}_+$ du problème de Cauchy :

$$y + (1 + \gamma\, q)\, y = 0,\ y\,(0) = \alpha\,,\ \ y'\,(0) = \beta.$$

Exercices 7 —

1. L'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de (S) est $\{X_0 + \exp(\cdot\ A)C, C \in \mathbf{R}^n\}$. La stabilité asymptotique équivaut donc à ce que pour tout $C \in \mathbf{R}^n$ on ait : $\exp(tA)C \to 0_{n,1}$, lorsque $t \to +\infty$.

   Remarque. *Il en résulte que X_0 est une position d'équilibre asymptotiquement stable de (S) si et seulement si $0_{n,1}$ en est une pour le système $X' = AX$. Dans la suite nous supposerons donc sans perte de généralité que : $B = 0_{n,1}$ et $X_0 = 0_{n,1}$*

   • Supposons que $\exp(tA) \underset{t\to+\infty}{\to} 0_n$. Pour tout $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,

   $$\exp(tA)C \underset{t\to+\infty}{\to} 0_{n,1},$$

   par continuité sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ du produit à droite par C (application linéaire sur un espace de dimension finie).

   Donc la position d'équilibre X_0 est symptotiquement stable.

   • Supposons la position d'équilibre symptotiquement stable. Soient i et j des éléments de $[\![1, n]\!]$. Par continuité du produit scalaire canonique par E_j (application linéaire en dimension finie [1]),

   $$(\exp(tA))[i, j] = E_i^\top \exp(tA)E_j \underset{t\to+\infty}{\to} E_i^\top 0_{n,1} = 0.$$

   Donc, i et j étant quelconques les coordonnées de $\exp(tA)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tendent toutes vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, donc

   $$\exp(ta) \underset{t\to+\infty}{\to} O_n.$$

1. En dimension infini la continuité demeure grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

2. On suppose que les parties réelles de toutes les valeurs propres complexes de A sont négatives. Montrer que X_0 est une position d'équilibre asymptotiquement stable de (S).
   Notons $\lambda_1, ...\lambda_k$ les valeurs propres complexes et deux à deux distinctes de A. Comme χ_A est scindé dans $\mathbf{C}$ la décomposition par blocs au programme s'écrit :

$$M = P\mathrm{diag}(A_1, ..., A_p)P^{-1},$$

   où $p \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$, et pour $i = 1, ..., p$ $A_i = \lambda_i I_{m_i} + N_i$, avec m_i la multiplicité de λ_i et N_i une matrice triangulaire supérieure stricte (donc nilpotente d'ordre m_i ou moins). Alors pour tout réel $t \geq 0$,

$$\exp(tA) = P\mathrm{diag}(M_1(t), ...M_p(t))P^{-1},$$

   où $M_i(t) = \exp(t\lambda_i I_{m_i} + tN_i)$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme I_{m_i} et N_i commutent, on a pour tout $t \in \mathbf{R}_+$.

$$\exp(t\lambda_i I_{m_i} + tN_i) = \exp(\lambda_i t)I_{m_i} \sum_{k=0}^{m_i} \frac{t^k}{k!} N^k.$$

   Prenons $\| \cdot \|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, (par exemple une norme d'opérateur) alors pour tout réel $t > 1$:

$$0 \leq \|M_i\| = \exp(t\lambda_i I_{m_i} + tN_i)\| \leq \exp(\lambda_i t)\|I_{m_i}\| \sum_{k=0}^{p_i} \frac{t^k}{k!}\|N\|^k \leq M \exp(\lambda_i t)t^{m_i},$$

   où $M = m_i(\|N\| + 1)^{m_i}\|I_{m_i}\|$. Par croissances comparées de l'exponentielle et d'une fonction puissance, le lemme des gendarmes assure :

$$\| \exp(t\lambda_i I_{m_i} + tN_i)\| \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$$

   Donc M_i tend vers 0_{m_i} et donc aussi $\mathrm{diag}(M_1(t), ..., M_p(t)) \underset{t\to+\infty}{\to} 0_n$. Donc par continuité de la conjugaison par P, on a $\exp(tA) \underset{t\to+\infty}{\to} 0_n$, (dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ donc *a fortiori* dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$).
   D'où par 1 la stabilité asymptotique de la position d'équilibre.

3. (a) On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme euclidienne canonique $\| \cdot \|_2$.
   La solution du système $X' = AX$ sur $\mathbf{R}_+$, qui prend en 0 la valeur V_0 est :

$$\mathbf{R}_+ \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\,;\ t \mapsto \exp(tA)V_0.$$

   Mais pour tout entire $N \geq 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{t^k A^k}{k!}\right) V_0 = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{t^k \lambda_0^k}{k!}\right) V_0.$$

   Par continuité sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de de $M \mapsto MV_0$ on obtient en laissant tendre N vers $+\infty$:

$$\exp(tA)V_0 = \exp(\lambda_0 t)V_0.$$

   Donc $\| \exp(tA)V_0\|_2 = \exp(\lambda_0 t)\|V_0\|_2 \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$, car $\lambda_0 \in \mathbf{R}_+^*$. Donc La position d'équilibre n'est pas asymptotiquement stable.

(b) Laissons $\|\cdot\|_2$ désigner la norme 2 autant sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ que sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. La solution sur $\mathbf{R}_+$ complexe de (S) vérifiant la condition initiale $X(0) = V_0$ est comme dans (a)

$$\mathbf{R}_+ \mapsto \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})\,;\ t \mapsto \exp(\lambda_0 t)V_0$$

Or$\|\exp(\lambda_0 t)V_0\|_2 = \exp(rt)\|V_0\|_2 \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc une au moins des deux applications $t \mapsto \mathrm{Re}(\exp(tA)V_0)$ et $t \mapsto \mathrm{Im}(\exp(tA)V_0)$ ne tend pas vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, gageons que c'est la première, le cas de la seconde, *mutatis mutandis, servatis servandis*, ce traite de même.

Mais $t \mapsto \mathrm{Re}(\exp(tA)V_0)$ est la solution sur $\mathbf{R}_+$ de (S) vérifiant la condition initiale $X(0) = \mathrm{Re}(V_0)$, en effet :

$$\mathrm{Re}(\exp(tA)V_0) = \exp(tA)\mathrm{Re}(V_0),$$

ce qui se prouve grâce à la réalité de A, d'abord sur les sommes partielles donnant l'exponentielle, puis par un passage à la limite (toujours la continuité de la multiplication à droite d'une matrice par V_0.

Donc (S) admet une solution qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$, donc la position d'équilibre n'est pas asymptotiquement stable.

Exercice 8 — Cryptographie —

1. Chiffrement du message

(a) Comme p est premier, un entier k n'est pas premier avec p si et seulement si p divise k, donc $\varphi(p) = p-1$ $(1, 2, \ldots, p-1$ sont premiers avec $p)$. De même $\varphi(q) = q-1$. Or p et q, nombres premiers distincts sont premiers entre eux, donc d'après 1. (a),

$$\varphi(n) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1).$$

(b) Le lemme de Bezout assure l'existence d'entiers u et v tels que : $ue + v\varphi(n) = 1$. Plus généralement pour tout entier k,

$$(u + k\varphi(n))e + (v - ke)\varphi(n) = 1$$

En prenant pour $k > |u|$, $u + k\varphi(n)$ est strictement positif, en notant d ce nombre,

$$\boxed{ed \equiv 1\,[\varphi(n)]}$$

2. Déchiffrement du message

(a)
- Premier cas : *M premier avec p.*
  Donc p ne divise pas M. Le petit théorème de Fermat donne alors : $M^{p-1} \equiv 1\,[p]$. Par ailleurs,d'après 2.(b), il existe un entiet h tel que $ed = 1 + h(p-1)$. Donc $M^{ed} = M \times (M^{(p-1)})^h$ et $(M^{(p-1)})^h \equiv 1^h \equiv 1\,[p]$, donc $M^{ed} \equiv M\,[p]$
- Second cas : *M non premier avec p.*
  Comme p est premier, il divise M, donc M et M^{ed} sont tous deux congrus à 0 modulo p.

Dans tous les cas $\boxed{M^{ed} \equiv M\,[p]}$

(b) De la précédente question, il vient : $p|M^{ed} - M$ et de même $q|M^{ed} - M$. Comme p et q sont premiers entre eux, $pq|M^{ed} - M$ Soit $M^{ed} \equiv M\,[n]$. Mais $C \equiv M^e\,[n]$. Donc $C^d \equiv M^{ed}[n]$ et finalement $\boxed{C^d \equiv M[n]}$.

Exercice 14 —
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on les fonctions de la variable réelle x, u_n définies par :

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}\,;\, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

On considère également la fonction f de la variable réelle x, définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

1. Soit un rél x. Ce réel est élément du domaine de définition de f si et seulement si, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n(x)$ est défini et la série numérique $\sum n \geq 0 u_n(x)$ converge. La première condition nécessite que $x \neq \pm 1$; si $x \neq \pm 1$ alors la série $\sum n \geq 0 u_n(x)$ converge si et seulement si $x < 1$. En effet :
   — si $|x| < 1$, alors $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, et donc $\sum n \geq 0 u_n(x)$ diverge grossièrement ;
   — si $|x| < 1$, alors $0 \leq |u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$ et donc $\sum n \geq 0 u_n(x)$ converge absolument par comparaison à la série géométrique $\sum |x|^n$, qui converge puisque de raison élément de $[0, 1[$.

   Conclusion : le domaine de définition D_f de f est $]-1, 1[$
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
   - Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'application u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ de dérivée :

   $$u_n' \ :\,]-1, 1[\to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}.$$

   - Par 1., la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement.
   - Soit $a \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in]-a, a[$ on a

   $$|u_n'(x)| \leq \frac{1}{1-a} n a^{n-1}$$

   et la série $\sum_{n\geq 1} n a^{n-1}$ converge, car le rayon de convergence de la série entière $\sum n z^{n-1}$ est 1 comme série entière dérivée de la série $\sum z^n$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[-a, a]$.

   Tout élément de D_f admettant un voisinage de la forme $[a, -a]$, les trois points précédents assurent que f ets de classe $\mathcal{C}^1$, donc continue et dérivable.
3. Soit $x \in]0, 1[$ La décroissance sur $\mathbf{R}$ de $t \mapsto x^t$ assure celle de

   $$U \ :\ [1, +\infty] \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{x^t}{1-x^t}.$$

   Notons que U est intégrable au voisinage de $+\infty$ car $U(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} x^t$ et $t \mapsto x^t$ est intégrable car $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

   Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, par décroissance de U

   $$\int_1^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_1^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t + u_1(x) \tag{3}$$

Place pour deux figures.

Mais
$$\int_1^{+\infty}\phi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\ln(x)}\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)x^t}{1-x^t}\mathrm{d}t=[-\ln(1-x^t)]_1^{+\infty}=\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$
Donc comme $\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}\underset{x\to1^-}{\sim}\frac{\ln(1-x)}{x-1}$ et que $\frac{\ln(1-x)}{x-1}\underset{x\to1^-}{\longrightarrow}+\infty$ on a que $u_1(x)$ est négligeable devant $\frac{\ln(1-x)}{x-1}$ au voisinage de 1 et de plus par (3),
$$f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\frac{\ln(1-x)}{x-1}.$$

4. Soit x élément de $[-1,1]$, comme $|x^n|<1$ on a
$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\sum_{i+f0}^{+\infty}(x^n)^i=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=0}^{=\infty}x^{n(i+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}x^{np}.$$
La famille $(x^{np})_{(n,p)\in\mathbf{N}^{*2}}$ est sommable grâce à l'égalité précédente où x serait remplacé par $|x|$ (théorème de Fubini-Tonelli pour les familles positives). Donc en considérant la partition $(I_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de $\mathbf{R}^{*2}$, où pour tout entire $k\geq1$,
$$I_k=\{(p,n)\in\mathbf{N}^{*2},pn=k\},$$
le théorème de sommation par paquets pour les familles réelles **sommables**, prétend :
$$f(x)=\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^{*2}}x^{np}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{(n,p)\in I_k}x^{np}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{(n,p)\in I_k}x^k=\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k|x^k.$$
Or pour tout entier $k\geq1$, en notant D_k l'ensemble des diviseurs positifs de k, on a $I_k=\left\{\left(n,\frac{k}{n}\right),n\in D_k\right\}$, et donc $|I_k|=|D_k|=d_k$. Finalement :
$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}d_kx^k.$$

Exercice 1 $\star$

1. S_0 et S_1 La matrice S_1 admet deux valeurs propres distinctes 1 et -1, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Q})$ (Q est un corps !) est semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Q})$ à S_0.
2. Supposons que S_1 soit semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ à S_0 c'est-à-dire s'écrive
$$S_1=PS_0P^{-1},$$
avec P un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ inversible dans cet anneau. Le passage aux classes modulo 2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ donne puisque les congruences entre entiers sont compatibles avec le produit et la somme :
$$S_1=\bar{P}\bar{S}_0\overline{P^{-1}}.$$
mais le passage aux classes dans la relation $PP^{-1}=I_2$ assure de même que $\overline{P^{-1}}=\bar{P}^{-1}$ et la précédente relation devient
$$\begin{pmatrix}\bar1&\bar1\\\bar0&\bar1\end{pmatrix}=\bar{P}\begin{pmatrix}\bar1&\bar1\\\bar0&\bar1\end{pmatrix}\bar{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\bar1&\bar0\\\bar0&\bar1\end{pmatrix}.$$
Voilà qui est absurde ! S_0 et S_1 ne sont pas semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$.

Exercice 2⋆ — Théorème de Cayley-Hamilton par la formule de Cauchy —

Un problème récurrent pour cet exercice et d'utiliser l'expression de l'inverse de $I_n - M$ sous forme de la somme d'une série géométrique sans la démontrer : cette formule bien que classique n'est pas au programme. Un autre grief à adresser aux copies est l'utilisation de théorème d'interversion série/intégrale sous l'hypothèse de convergence uniforme, sans préciser que l'intégrale est prise sur un **segment**.

Ceci étant donnons nous une norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et un réel R strictement supérieur à $\|A\|$. Soient un réel $r \geq R$ et un réel θ. La série $\sum \frac{A^n}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ converge absolument, puisque pour tout $p \in \mathbf{N}$, comme $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre,

$$\left\|\frac{A^p}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right\| \leq \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^p$$

et que la série géométrique de raison $\frac{\|A\|}{r}$ converge ($\frac{\|A\|}{r} < 1$).

Par ailleurs pour tout $p \in \mathbf{N}$, par téléscopage

$$\left(I_n - \frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)^k = I_n - \left(\frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)^{p+1},$$

et donc en laisant tendre p vers $+\infty$, par continuité du produit à gauche par $\left(I_n - \frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)$, application linéaire en dimension finie,

$$\left(I_n - \frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)^k = I_n,$$

en effet

$$0 \leq \left\|\left(\frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)^{p+1}\right\| \leq \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^{p+1} \underset{p\to+\infty}{\to} 0.$$

Donc $\left(I_n - \frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)$ est inversible à droite, donc inversible (il s'agit de matrices) et :

$$\left(I_n - \frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)^p.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}I_n - A\right)^{-1}\mathrm{d}\theta =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{r}\left(I_n - \frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)^{-1}\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{A}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)^p.\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}F_p(\theta)\mathrm{d}\theta,\end{aligned} \tag{4}$$

où pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$F_p \ : \ [0, 2\pi] \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ \theta \mapsto r^{k-p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-p)\theta}A^p.$$

La série $\sum F_p$ converge uniformément car normalement sur $[0, 2\pi]$, en effet :

— pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $\|F_p(\theta)\| \leq r^k\left(\frac{\|A\|}{r}\right)^p$;

— la série géométrique $\sum\left(\frac{\|A\|}{r}\right)^p$ converge car sa raison est élément de $[0, 1[$.

Donc par permutation du signe somme est intégrale sur un **segment**[2], on a :

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta}\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}I_n-A\right)^{-1}\mathrm{d}\theta =&\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_p(\theta).\mathrm{d}\theta,\\ =&\sum_{p=0}^{+\infty} r^{k-p}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-p)}\theta\mathrm{d}\theta}_{=\delta_{k,p}}\ A^p.\\ =&A^k.\end{aligned}\tag{5}$$

Par linéarité de l'intégration vient alors :

$$\begin{aligned}\chi_A(A)=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{\mathrm{i}\theta}\chi_A(re^{\mathrm{i}\theta})\left(re^{\mathrm{i}\theta}I_n-A\right)^{-1}\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{\mathrm{i}\theta}\det(re^{\mathrm{i}\theta}I_n-A)\left(re^{\mathrm{i}\theta}I_n-A\right)^{-1}\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{com}\left(\left(re^{\mathrm{i}\theta}I_n-A\right)\right)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\tag{6}$$

La ploynomialité du déterminant d'une matrice en ses coefficients montre que chaque application coefficient de

$$\theta\mapsto e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{com}\left(\left(re^{\mathrm{i}\theta}I_n-A\right)\right)$$

est un polynôme en $\exp(\mathrm{i}\,\cdot)$, *sans terme constant*, donc la nullité de $\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}p\theta}\mathrm{d}\theta$ pour tout entier $p\geq 1$ assure que

$$\chi_A(A)=0_n,$$

voici prouvé le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 4 —

1. Déterminer les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivables telles que $f'(x)=f(-x)$ pour tout réel x.
2. Déterminer les applications f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ dérivables telles que $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout réel x.

Dans cet exercice, on pouvait raisonner par analyse-synthèse, il convenait alors de mettre en évidence la structure de la preuve, notons que transformer la condition initiale en problème de Cauchy était plus efficace — comme c'est souvent le cas — que de la transformer en une simple équation différentielle.

Nous proposons une résolution par équivalence. Traitons par exemple 2.

Notons S l'ensemble chercher. Notons qu'en fait $S\subset\mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ puisque $\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+}}$ est $\mathcal{C}^1$.

Soit donc $f\in\mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$. l'application f est élément de S si et seulement si[3] :

$$(f')'=\left(f\circ\frac{1}{\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+}}\right)'\text{ et } f'(1)=f\left(\frac{1}{1}\right).$$

2. Le mot segment ici est important et avec la convergence uniforme constitue une des deux hypothèses à citer.

3. Deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalles sont égales si et seulement si elles ont même dérivée et coïncient en un point.

Soit encore si

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f''(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) \text{ et } f'(1) = f(1).$$

Donc $S = \{f_a, a \in \mathbf{R}\}$ où pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'application f_a est LA solutionsur $\mathbf{R}_+^*$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' = -\frac{1}{x^2} y, \\ y(1) = a, \\ y'(1) = a. \end{cases} \tag{7}$$

Résolution.

Posons $\phi_k \ : \ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{C}, x \mapsto x^k$, est solutionsur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation $y'' = -\frac{1}{x^2} y$ si et seulement si $k = k_\pm$ où $k_\pm = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, comme l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}_+^*$est un plan leur demi-somme et demi-différence divisée par i sont encore deux solutions, à savoir :

$$\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto x^{\frac{1}{2}} \cos\left(\ln(x)\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ ; \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\ln(x)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Elles forment un système fondamental de solutions tant complexes que réelles puisque leur wronskien w vérifie :

$$w(1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$

On a alors que pour tout réel a, LA solutionsur $\mathbf{R}_+^*$ de (7) est

$$f_a \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto a\left(x^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\ln(x)\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\ln(x)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right).$$

D'ou S.