Exercices d'oraux 2024

Laurent BERNIS

5 juin 2024

Oral 1

A. Soit A un sous-anneau d'un corps $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$, etc.). Montrer qu'une matrice M élément de $\mathcal{M}_n(A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(A)$ (c'est-à-dire est élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et son inverse est dans $\mathcal{M}_n(A)$) si et seulement si $\det(A)$ est un élément inversible de A.

A. bis (X, ENS). Soit N élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ à coefficients entiers. On suppose qu'il existe un entier $d \geq 1$ tel que $N^d = I_2$. Montrer que $N^{12} = I_2$.

B.

1. Montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que l'application de

$$f \ : \ \mathbf{R}_+ \setminus \{1\} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{\ln t}{1-t^2}$$

   est prolongeable par continuité à $\mathbf{R}_+^*$ en une application $\tilde{f}$.

3. Montrer la convergence et donner la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \tilde{f}(t)\mathrm{d}t.$$

Oral 2

A. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que la transposition $(1,2)$ et le cycle $(1,2,...,n)$ engendrent le groupe symétrique S_n ;

A. bis ÉNS 2023

1. La transposition $(1,3)$ et le cycle $(1,2,3,4)$ engendrent-ils le groupe symétrique S_n ?
2. soient a et b entiers tels que $1 \leq a < b \leq n$ et tels que la transposition (a,b) et le cycle $(1,2,...,n)$ engendrent le groupe symétrique S_n. Montrer que $b-a$ et n sont premiers entre eux.
3. Montrer la réciproque de la propriété précédente.

B. Donner un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \exp(it^2)\mathrm{d}t$.

Oral 3

A. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ abélien. Montrer que les éléments de G sont codiagonalisables.

Soit $f := \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G}$. l'endomorphisme f est-il diagonalisable. Le résultat demeure-t-il si l'on ne suppose plus G abelien.

A bis (ÉNS 2023). soient $r \in \mathbf{N}^*$, d_1, d_2,...,d_r des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $d_i | d_{i+1}$, pour $i = 1, ..., r-1$. déterminer le plus petit entier n tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/d_2\mathbf{Z} \times ... \times \mathbf{Z}/d_r\mathbf{Z}$.

B. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$. Exprimer pour tout entier naturel n, I_n comme la somme d'une série numérique.

Oral 4

A. calculer $\displaystyle\sum_{0\leq 3k\leq n} \binom{n}{3k}$.

B. (Mines 2017)

A. Soient f et g des fonctions de la variables réelle x définies par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t\,;\ g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f.
3. Donner une équation différentielle vérifiée par f.
4. Montrer que f et g coïncident sur $\mathbf{R}_+^*$.
5. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Oral 5

A bis. (version ÉNS) Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbf{N}$, On suppose que $\mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}(X_1 = 1) \neq 0$. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = X_0 + X_1 + ...X_n$.

Montrer que $\mathbf{P}(4|S_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{4}$.

A. (version centrale)

1. Pour tout réel t et tout entier $n \geq 0$, on pose $f(t) = \mathrm{E}(\exp(\mathrm{i}tX_1)$ et $F_n(t) = \mathrm{E}(\exp(\mathrm{i}tS_n)$. Donner pour toute entier $n \geq 0$, une relation entre f et F_n.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer une relation entre $\mathbf{P}(4|S_n)$ et $\sum_{k=0}^{3} F_n\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.
3. Montrer pour tout $t \in]0, 2\pi[$, l'inégalité $|f(t)| < 1$.
4. Montrer que $\mathbf{P}(4|S_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{4}$.

B. Étudiez la nature de la série de terme général $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+n^{2/3}})$.

Oral 6

A. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$.

1. À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbf{C}$ sur C ?
2. À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$?

A bis. ENS À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$. ?

B. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Donner une expression de f sans recourir au signe somme en utilisant les développements en série entière de $x \mapsto \exp(j^p x)$, pour $p = 0, 1, 2$, $(j = e^{\frac{i2\pi}{3}})$.
3. Même question en montrant que f satisfait une équation différentielle.

Oral 7

A. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$f(nx) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

On suppose f uniformément continue. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} = 0$.

A bis.

1. On ne suppose plus f que continue.
   Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

   $$F_n = \{x \in \mathbf{N}; \forall p \in \mathbf{N}, p \geq n \Longrightarrow |f(px)| \leq \varepsilon\}.$$

   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$, tel que $F_{\mathbf{N}}$ soit d'intérieur non vide.

   (b) Conclure.

2. Donner un exemple d'application f qui n'admet pas 0 comme limite en $+\infty$.

B.

Oral 8

A. Notons $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R})$, on munit cet espace vectoriel de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soient φ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue et

$$K \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{E} \ f \mapsto \varphi \circ f.$$

Montrer que K est continue.

B.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes suivant la même loi que X. On suppose $X_1 + X_2 \approx X$.

1. On suppose dans cette question que X admet une variance. Montrer qu X est presque sûrement constante.
2. On suppose dans cette question que X est à valeurs positives. Montrer qu X est presque sûrement constante.

Oral 9

A. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Montrer que $A^\top = A^2$ si et seulement si A est orthogonalement semblable à l'une des quatre matrices suivantes : I_2, O_2, $\mathrm{diag}(1,0)$, $R_{\frac{2\pi}{3}}$.

B. Déterminer le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

B bis. (ÉNS 2017) Soient $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq +\infty}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. suivant chacune la loi uniforme sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on considère M_n la matrice aléatoire

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} & \dots & X_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n,1} & \dots & X_{n,n} \end{pmatrix},$$

variable aléatoire à valeur dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. On note r_n, l'espérance du rang de M_n. Déterminer un équivalent de r_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Oral 10

A. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la trace de M^k est nulle. Montrer que M est nilpotente.

A bis. (ENS 2023) Soient $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ semblables entre eux et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $\|M_k\| \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. montrer l'existence d'un élément N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotent et d'une extractrice ϕ tels que :

$$\frac{M_{\phi(k)}}{\|M_{\phi(k)}\|} \underset{k\to+\infty}{\to} N.$$

B. Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace euclidien, a et b des vecteurs unitaires indépendants et

$$u\ :\ \mathbf{E}\to\mathbf{E}\,;\ x\mapsto (a|x)b+(b|x)a.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique.
2. Trouver le noyau de u.
3. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de u.

Oral 11 A. Soit Z une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbf{N}$

Pour tout entiet naturel n, $M_n(Z)$ désigne le moment d'ordre n de Z, c'est-à-dire l'espérance de Z^n.

On considère la série entière de la variable réelle t, $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{M_n(Z)}{n!}t^n$, appelée *série exponentielle des moments de Z.*

La somme de cette série sera notée L_Z et R désignera son rayon de convergence.

1. On suppose $R>0$. Montrer que pour tout élément t de $]-R,R[$, la variable aléatoire $\exp(tZ)$ est d'espérance finie et que : $L_Z(t)=\mathrm{E}(\exp(tZ))$.
2. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que leurs rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 sont non nuls. Exprimer $L_{X+Y}(t)$ en fonction de $L_X(t)$ et $L_Y(t)$, pour tout réel t tel que ces trois quantités soient définies.
3. Soit $\lambda\in\mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier $n\geq 1$, on se donne n variables aléatoires $X_{n,1},X_{n,2},...,X_{n,n}$, définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et l'on pose :
$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_{n,i}.$$
Soit enfin W une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
Montrer que pour tout entier $n\geq 1$, le rayon de convergence de la série exponentielle des moments de S_n est infini et que pour tout $t\in\mathbf{R}$,
$$L_{S_n}(t)\underset{n\to+\infty}{\to}\mathrm{E}(\exp(tW)).$$
4. Soient Z_1 et Z_2 des variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ prenant un nombre fini de valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que les rayons de convergence des séries exponentielles des moments associées sont tous les deux non nuls et que :
$$\mathrm{E}(\exp(tZ_1))=\mathrm{E}(\exp(tZ_2)),$$
pour tout réel t pour lequel ces deux quantités sont définies.
Montrer que Z_1 et Z_2 suivent la même loi.

Oral 12

A. Soit un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ de dimension non nulle n.

On considère $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p$ des vecteurs de $\mathbf{E}$ de norme inférieure ou égale à 1.

Soient $q_1, \ldots, q_p$ des éléments de $[0,1]$, on pose $\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} q_i \vec{u}_i$. $\vec{v}$ est un vecteur du parallélépipède $\mathcal{P}$ construit sur les $\vec{v}_i$, du moins lorsque $n \geq p$. Pour tout partie I de $\{1, \ldots, p\}$, on pose

$$\vec{v}_I = \sum_{i \in I} \vec{u}_i,$$

les $\vec{v}_I$ sont les sommets du paralèllépipède $\mathcal{P}$.

Montrer : qu'il existe un sommet de $\mathcal{P}$ distant de $\vec{v}$ de moins de $\frac{\sqrt{n}}{2}$.

On pourra considérer p variables de Bernoulli $X_1, \ldots, X_p$ indépendantes et la variable aléatoire $S = \left\| \sum_{i=1}^{p} X_i \vec{u}_i - \vec{v} \right\|^2$ et en choisissant astucieusement le paramètre de chaque variable X_i, $i = 1, \ldots, p$, conclure.

A' (X-ENS 2019)

1. Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. Soit x un point de l'enveloppe convexe de A. Montrer que x peut s'écrir comme combinaison convexe d'une famille de $n+1$ points de A.
2. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit T une parti non vide de la boule unité fermée, et x un point de l'enveloppe convexe de T. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. il existe $(x_1, ..., x_k) \in T^k$ telle que

$$\left\| x - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

   Indication. Introduire des points deux à deux distincts $y_1, ... y_p$ de T et des réels positifs $\lambda_1, ... \lambda_p$ de somme 1 et tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i$, puis considérer une variable aléatoire X telle que $\mathbf{P}(X = y_i) = \lambda_i$, pour tout $i \in \{1, ..., p\}$.

B. Soit un réel $\alpha > 1$. On pose pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\ \alpha}}$.

Étudiez la nature de la série de terme général R_n/S_n.

Oral 13 (Centrale PYTHON)
On notera pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$ par S_n.
Soit G est un groupe fini, alors on pose ;

$$p_G = \frac{|\{(x, y) \in G^2 | xy = yx\}|}{|G \times G|}$$

et pour tout $x \in G$,

$$p_x = \frac{|\{y \in G | xy = yx\}|}{|G|}.$$

On dit qu'un élément x de G est conjugé à un élément y de G s'il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$.
On a admet que dans G la relation « être conjugué » est une relation d'équivalence et l'on note N_G le nombre de classes d'équivalence pour cette relation.

1. Soit $(a_1, a_2, ..., a_r)$ un r cycle élément de S_n. Pour tout $\sigma \in S_n$, montrer que $\sigma c \sigma^{-1}$ est un r-cycle à préciser.
2. Coder une fonction en PYTHON qui donne une permutation aléatoire de $[\![1, n]\!]$, puis une fonction qui approxime p_{S_n}, pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5.
3. Justifier les valeurs pour $n = 1, 2$ et 3 de p_{S_n}.
4. (a) Soient x et y des éléments de G conjugués. Montrer que $p_x = p_y$.
   (b) Soient x et y des éléments de G conjugués. Montrer que

   $$|\{s \in \mathbf{G} | y = sxs^{-1}\}| = |\{t \in \mathbf{G} | tx = xt\}|.$$

   Montrer que :

   $$p_G = \frac{N_G}{|G|}.$$

Oral 14 (Centrale Python)
Pour tout réel $t > 0$ on considère l'aplication

$$f_t \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \, ; \mapsto \mathrm{e}^{-tx}.$$

et on pose $\Gamma_t = \{(x, f_t(x), x \in \mathbf{R}\}$. On désigne enfin par P l'élément $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ de $\mathbf{R}^2$

1. Montrer pour tout réel $t > 0$ l'existence d'un et d'un seul point de Γ_t qui minimise la distance de P à Γ_t, on notera u_t ce point.
2. Représenter Γ_k et u_k pour tout $k \in [\![1, 20]\!]$. Faite une conjecture sur la suite (u_k).
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

   $$\frac{1}{2} \leq u_t \leq 1.$$

4. Montrer que (u_k) est monotone et qu'elle converge vers une limite ℓ.
5. Comment déterminer avec PYTHON le comportement de $\sum(u_n - \ell)$.
6. Montrer que la série $\sum(u_n - \ell)$ converge.

Oral 15
A.

1. Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} \mathrm{d}t$.
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

B. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ et de même loi, admettant un moment d'ordre 2. On pose

$$Z = X + Y + 1.$$

On suppose que $Z \equiv \mathcal{G}_p$ ($p \in]0, 1[$).

1. Déterminer l'espérance et la variance de X en fonctionde p.
2. Déterminer la loi de X.

B bis (ÉNS 2023)

Soi A l'ensemble des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé qui possèdent un moment d'ordre 3.

Soit $A_1 = \{X \in A | \mathrm{E}(X) = 1, \mathrm{E}(X^2) = 2, \mathrm{E}(X^3) = 5\}$

Montrer que l'ensemble

$$\{\mathbf{P}(X = 0), X \in A_1\}$$

admet un minimum à déterminer.

Oral 16 A. Soit la fonction I de la variable réelle a définie par

$$I(a) := \int_{-a}^{+a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1 + x^2)(a^2 - x^2)}}.$$

Montrer que I est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

Déterminer les limites éventuelles de I en 0 et $+\infty$.

B. Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour tout événement A non négligeable, on définit $\mathrm{E}(X|A)$, (espérence conditionnelle sachant A) sous réserve d'existence par

$$\mathrm{E}(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x|A).$$

1. montrer que si X est d'espérance finie, alors $\mathrm{E}(X|A)$ est bien définie.
2. Supposons que X suive la loi géométrique de paramètre p ($p \in]0, 1)$. Calculer $\mathrm{E}(X|X > m)$ pour tout entier m.
3. Soient $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ un système complet d'événements. On suppose X d'espérence finie. Montrer :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) \mathrm{E}(X|A_k).$$

Oral 17

A. Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ ($A \in \mathbf{R}_+^*$). On note désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues et bornées. Il sera muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$

1. Justifier pour tout $g \in \mathcal{B}$ et tout $y \in \mathbf{R}$ la convergence de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y$$
et montrer que l'application $g * f \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y$ est continue et bornée.

2. Étudier la continuité de l'endomorphisme
$$L \ : \ \mathcal{B} \to \mathcal{B}\,; g \mapsto g * f.$$

B. Soit M un élément d e$\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que pour tout élément λ de $\mathrm{Sp}(M)$ on a :
$$\ker(A - \lambda I_n) = \ker\Big((A - \lambda I_n)^2\Big)$$
Montrer que A est diagonalisable.

Oral 18

A. Soit N un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotent.

Montrer qu'il existe un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $\exp(A) = I_n + N$

B. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Soit f une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ différentiable telle que :

i $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

ii Pour tout $x \in \mathbf{R}$' $\mathrm{d}g(x)$ est injective.

Pour tout $a \in \mathbf{R}^n$, on pose
$$g_a \ : \ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n\,; \ x \mapsto \|f(x) - a\|^2$$

1. Montrer que g est différentiable et expliciter sa différentielle.
2. En déduire que f est surjective.

Oral 19

A. Montrer que tout sous groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

A bis. Soit $(G, *)$ un groupe fini. On suppose que G est engendré par $\{x, y\}$ où x et y sont deux éléments d'ordre 2 distincts. Montrer que G contient un sous groupe de cardinal $\frac{|G|}{2}$.

B. On considère une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et de laplacien nul.

1. Montrer qu'il existe une application g de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$$\partial_1 f = \partial_2 g \text{ et } \partial_2 f = -\partial_1 g$$

2. On considère l'application
$$\phi \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,; \ \frac{1}{2\pi r} r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}\theta..$$
Montrer en utilisant la question 1 que ϕ est constante (on déterminera sa valeur).

Oral 20

A. On muni $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit Γ la partie de $\mathbf{R}^3$, d'équation

$$\Gamma\ :\ x^2+y^2-z^2=0$$

1. Donner l'équation du plan tangeant P à Γ en un point (a,b,c) de Γ distinct de $(0,0,0)$,

$$P=(a,b,c)+\mathrm{T}_{(a,b,c)}\Gamma.$$

   Montrer que P passe par $(0,0,0)$.
2. Montrer que pour tout réel t non nul, $t(a,b,c)$ est élément de Γ et comparer les plans tangents à Γ en (a,b,c) et en $t(a,b,c)$.

B Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. On suppose

$$\forall k\in\mathbf{N}, \mathrm{Tr}(B^k)=\mathrm{Tr}(A^k).$$

Montrer que A et B ont même polynôme caractéristique.

Reprendre la question avec A et B éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

B (bis)

Pour tout $R\in\mathbf{R}_+^*$ on note $B_R=\{z\in\mathbf{C};|z<R\}$.

1. Déterminer le rayon de convergence r de la série entière de la variable complexe z,

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k.$$

   On note f sa somme.
2. Pour tout $z\in B_1$, calculer $\exp(f(z)$.
3. Soit $n\in\mathbf{N}^*$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Établir l'existence d'un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $z\in B_\alpha$

$$\det(I_n+zA)=\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\mathrm{Tr}(A^k)}{k}z^k\right).$$

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, $\mathrm{Tr}(A^k)=0$.
5. On suppose que B est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que :

$$\forall k\in\mathbf{N}, \mathrm{Tr}(B^k)=\mathrm{Tr}(A^k).$$

   La matrice B est elle nécessairement semblable à A ? A-t-elle nécessairemnt même polynôme caractéristique que A ?

Oral 21

A. Montrer qu'il existe une et une seule matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que pour tout $t\in\mathbf{R}$,

$$\exp(tA)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0\\ \sin t & \cos t & 0\\ 0 & 0 & t\end{pmatrix}.$$

Étudier la nature géométrique de A.

B. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On définit alors par récurrence la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires par

$$\begin{cases} U_0=U_1=1\\ \forall n\in\mathbf{N},\ U_{n+2}=U_{n+1}+X_nU_n.\end{cases}$$

1. Montrer que la suite converge presque sûrement vers $+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Oral 22

A. Soient A et B des élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$on suppose que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. Montrer l'existence d'éléments U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ tels que : $UA+VB=I_n$.

A bis. Soit K un corps. Soit A élément de $\mathcal{M}_n(K)$. On note $\tilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.

On pourra supposer dans un premier temps A fini.

Montrer qu'il existe un polynôme P élément de $K[X]$ tel que $\tilde{A}$ soit un polynôme en A.

Oral 23

A. Soient n un entier pair A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que :

— ses coefficients diagonaux soient nuls ;

— les coefficients non diagonaux soient égaux à ± 1.

Montrer que M est inversible.

A bis. Soit n un entier naturel non nul. Dans le groupe symétrique S_n il y a-t-il plus de dérangements de signature paire que de dérangements de signature impaire ? On discutera selon les valeurs de n.

B.

Oral 24

A. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

A bis Soit ϕ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui envoie $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même.

1. Donner des exemples de tels endomorphismes. Montrer qu'il préservent le rang.
2. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\phi(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
   Indication : Montrer dans le cas où M est non inversible, qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que pour tout complexe λ, $P-\lambda M$ soit inversible.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(\phi(M)) \geq \mathrm{rg}(M)$.
   Indication : Montrer que si le rang de M est $r<n$, alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $Q-\lambda M$ soit non inversible pour exactement r valeurs de λ.
4. Montrer que ϕ conserve le rang.

B. Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et $f\ :\ U \to \mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Soient a un élément de U et B une boule ouverte de centre x incluse dans U. Donner une expression de $f(y)-f(x)$ au moyen de la différentielle de f et d'une intégrale, valable pour tout y élément de B.
2. On suppose que $\mathrm{d}f(a)$ est inversible. Démontrer qu'il existe un voisnage V de a inclus dans U tel que la restriction de f à V soit injective.

Oral 25

A.Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que :

$$\chi_M = X^3 - \mathrm{Tr}(M)X^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{com}(M))X - \det(M).$$

B.

1. Montrer que pour tout réel x qui n'est pas un entier négatif ou nul, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ converge.
2. Montrer que l'application $\gamma\ :\ \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}_- \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$ est de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Oral 26

Soient X et Y des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et qui suivent une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda \in \mathbf{R}_+^*$)

On considère la variable aléatoire A, à valeur dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

ainsi que la variable aléatoire $T = \mathrm{tr}(A)$.

1. Déterminer la loi de T, donner son espérance et sa variance.
2. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ diagonalisables. Déterminer la probabilité de l'événement $\{A \in \mathcal{D}\}$.
3. On considère pour tout $\omega \in \Omega$, l'application linéaire

$$L(\omega)\ :\ \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto A(\omega)M$$

et la variable aléatoire R, définie par $R = \mathrm{rg}(L)$:

$$\forall \omega \in \Omega\,;\ R(\omega) = \mathrm{rg}(L(\omega)).$$

Déterminer la loi de R.

Oral 27 Centrale PYTHON Soient $(X_{i,k})_{1\leq i,j\leq n}$ une variable aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, notée A dont les coefficients sont des varables mutuellement indépendantes et $D = \det(A)$.

1. Avec PYTHON, estimer les valeurs de $\mathrm{E}(D)$ et $\mathrm{V}(D)$ lorsque les $X_{i,j}$ suivent une loi de Randmacher. Que conecturer ?
2. Montrer votre conjecture pour $n = 1$ et $n = 2$.
3. Dans le cas général, montrer que $\mathrm{E}(D) = \det((\mathrm{E}(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
4. Soit x un réel. Calculer $\mathrm{E}(\chi_A(x)$, dans le cas où les $X_{i,j}$ suivent toutes la même loi.
5. On suppose les $X_{i,j}$ centrées réduite.
   (a) Soit σ et τ deux permutations de $\{1, ...n\}$. Montrer que :
   $$\mathrm{cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\,,\,\prod_{i=1}^{n} X_{\tau(i),i}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (b) que vaut $\mathrm{V}(D)$?

Oral 28 (Centrale 2022) A.

1. Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite sous additive de réels positifs sous additive, c'est–dire que pour tout (n, m), couple d'entiers :
   $$u_{n+m} \leq u_n + u_m.$$
   Montrer que la suite $(u_n/n)_{n\geq 1}$ converge vers la borne inférieure de ses valeurs.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variable aléatoires i.i.d. Pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$ on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$ Soit a un rééel strictement positif. tel que $\mathbf{P}(X_1 \geq a) > 0$.
   Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\ln(\mathbf{P}(S_n \geq na)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente. B. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est compact.

Oral 29

A. Soit Soit E un espace euclidien. Montrer que l'ensemble des projecteurs orhogonaux est compact. L'ensemble des projecteurs orthogonaux ou non est-il compact ?

B.Pour tout élément A de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ qui n'admet pas -1 comme valeurs propre, il existe une et une seule matrice antisymétrique H telle que :

$$A = (I_n - H)(I_n + H)^{-1}.$$

Oral 30 A . Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et u et v des éléments de $\mathcal{L}(E)$. On considere la propriété **(P)** :

$$u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}.$$

1. Montrer que si $\mathbf{E}$ est de dimension finie, aucun couple (u, v) ne vérifie **(P)**.
2. Montrer que si $\mathbf{E}$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ aucun couple (u, v) d'endomorphismes continus ne vérifie **(P)**.
3. Sur $\mathbf{R}[X]$ considérer $u\ :\ P \mapsto P'$ et $v\ :\ p \mapsto XP$ et trouver des normes pour lesquelles soit u soit v soit continu. (X 2013)

B. Déterminer $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(\pi) = \mathrm{e}$ et pour tout $z \in \mathbf{C}$, $P(z \neq \pi)$.

Oral 31

A.

— Soit K un compact non vide de $\mathbf{R}^2$, muni de sa structure euclidienne canonique. Existe-t-il un disque fermé d'aire minimal qui contienne K ?

— Peut on écrire $\mathbf{R}^2$ comme la réunion d'une famille de vrais cercles deux à deux disjoints.

B

1. Exprimer le déterminant de l'exponentielle d'une matrice M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ au moyen de la trace de M
2. A-t-on $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$?
3. A-t-on $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$?

Oral 32

A.

Nous dignerons par $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$

1. Montrer que l'ensemble des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{C}$ digonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ diagonlalisable. Prouver qu'elle vérifie $\chi_M(M) = 0$
3. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton pour tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

A bis. Comment adapter cette preuve de Cayley-Hamilton dans le cas d'un corps k quelconque.

Commencer par le cas où k ets infini.

B. Soit f une application d'un compact K d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ dans un e.v.n. $(E, \|\cdot\|_F)$, continue te injective.

Montrer que f induit un homéomorphisme de K sur $f(K)$, c'est-à-dire une bijection continue de bijection réciproque continue.

Oral 33

A.

Soient H le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ d'équation

$$H \ : \ x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$$

et l'application de

$$f \ : \ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \, ; \ (x_1, ...x_n) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} \exp(x_i^2).$$

La restriction de f à H admet-elle un minimum ?

B. Montrer que $SL_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Est-il Borné ? Convexe ?

Oral 34

A. Soient un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de dimension n non nulle et p un projecteur de $\mathbf{E}$ de rang 1. On considérera une base orthonormée $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_2)$ de $\mathbf{E}$.

1. Montrer que p est symétrique si et seulement si il est un projecteur orthogonal.
2. On suppose que p est un projecteur orthogonal. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = 1.$$

3. On note p^* l'adjoint de p,

   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(p^* \circ p) = \mathrm{Ker}(p)$.

(b) On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = 1$. Montrer que $p^\star \circ p$ est un projecteur orthogonal

On pourra en le justifiant diagonaliser $p^* \circ p$.

B. Montrer que l'adhérence d'un convexe d'un e.v.n. est convexe.

Oral 35

A . Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et A une matrice symétrique réelle d'ordre n n'ayant que des valeurs propres strictement positives. On note Φ_A l'application

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R},\ ; (X, Y) \mapsto^{\mathrm{t}} XAY.$$

Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, T, telle que $A = T^\top T$.

B. Soit n un entier spérieur ou égal à 2 et f une application continue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.

1. On suppose f surjective. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas un compact.
2. On suppose que f est convexe et que l'ensemble des zéros de f est un compact non vide montrer que :

$$f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Oral 36

A. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables. Montrer que $\mathrm{com}(A)$ et $\mathrm{com}(B)$ sont semblable.

B. On considère les équations différentielles suivantes :

$$x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x, \tag{1}$$

$$x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y. \tag{2}$$

1. Déterminer les solutions de (2) sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. L'équation (1) admet-elle des solutions au voisinage de 0 développables en série entière ?
3. Étudier la limite en $+\infty$ des solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ de (1).

B bis. L'équation (1) admet-elle des solutions sur $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Oral 37

A. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et A un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Montrer qu'il existe un élément Q de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et un élement R de $\mathcal{T}_n^+(\mathbf{R})$ tels que

$$A = QR.$$

A bis . Reprendre la question pour A non inversible.

B.

1. Pour tout entier naturel n et tout nombre réel x, on note : $u_n(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{-nx})$ et lorsque cela existe : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

   Déterminer l'ensemble de définition de f, noté I, et montrer que f est continue sur I, strictement décroissante.
2. Montrer que f admet une limite finie quand x vers $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0. On admettra : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Oral 38

A.

Soit l'élément de $\mathbf{R}[X]_n$,

$$P = X^n + a_1X^1 + ... + a_n.$$

On suppose que P est simplement scindé. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$, tel que pour tout $(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbf{R}^n$, si $\|(b_1, ..., b_n) - (a_1, ..., a_n)\|_\infty < \eta$, alors le polynôme $X^n + b_1X + ... + b_n$ est simplement scindé.

Soit $k \in \{1, ..., n\}$. Montrer que l'application de $\mathrm{B}_0((a_1, ..., a_n), \eta)$ dans $\mathbf{R}$ qui associe à $(b_1, b_2, ..., b_n)$ la k^{e} racine par ordre croissant de $X^n + b_1X + ... + b_n$ est continue.

B.

1. Donner un exemple d'anneau intègre qui n'est pas un corps.
2. Soit $(A, +, \times)$ en anneau intégre fini. Montrer que c'est un corps.

B'(ENS) Soit A une $\mathbf{R}$ algèbre de dimension finie, telle que l'anneau sous-jacent soit intègre.

1. Montrer que tout élément non nul de A est inversible.
2. Montrer que si l'algèbre A est commutative, alors elle est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Oral 39

A. — Polynômes d'Hilbert —

On pose $H_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$H_n = \frac{X(X-1)...(X-n+1)}{n!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $H_n(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$.
2. Montrer que le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.
3. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}[X]_n$. Montrer l'équivalence des 3 propositions suivantes.
   i. $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$.
   ii. Pour $k = 0, 1, ..., n$.
   iii. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{Z}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$.

B. Nature de la série :

$$\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Oral 40

A.

1. Montrer que $X^3 - 2$ est irreductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
   On désigne par α une de ses racines complexes et l'on pose
   $$A = \{a + b\alpha + c\alpha^2\}.$$
2. Montrer que A estun sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}$, vu comme un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$. Quelle est sa dimension ?
3. Montrer que A est un sous corps de $\mathbf{C}$.

A bis.

Soit $\mathbf{E} = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbf{Q}^2\}$; Montrer que $\mathbf{E}$ est un sous corps de $\mathbf{C}$ et en déterminer tous les automorphismes.

B. Soit $p \in \mathbf{R}$ Donner une condition nécessaire et suffissante sur p pour que l'application

$$f \ : \ \mathbf{R}^* \to \mathbf{R} \, ; \ x \mapsto \frac{\sin x}{x^p}$$

soit prolongeable à $\mathbf{R}$ en une application de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Oral 41

— INÉGALITÉ DE PALEY-ZIGMUND — Soit X une variable aléatoire discrète réelle à valeurs *strictement positives* admettant un moment d'ordre 2. soit $\lambda \in]0,1[$. Montrer que

$$\mathbf{P}(X \geq \lambda \mathrm{E}(X)) \geq \frac{(1-\lambda)^2 \mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}$$

Indication : On pourra commencer par majorer $\mathrm{E}(X \cdot \mathbf{1}_{\{X \geq \lambda \mathrm{E}(X)\}})$

B. Soient f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et α un élément de $\mathbf{R}_+^*$.

On suppose f bornée. Montrer que l'équation

$$y' - \alpha y = f(x) \tag{1}$$

admet une et une seule solution bornée.

B. bis On ne suppose plus f bornée, mais de carré intégrable. Montrer que (1) admet une et une seule solution de carré intégrable.

Oral 42 Soit n en entier naturel non nul. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ sont notés en colonne et $\mathbf{0}$ désigne le vecteur nul de $\mathbf{R}^n$. l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et la norme $\|\cdot\|_2$ utilisée sera la norme euclidienne canonique.

Par $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$) on désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ dont les valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est muni de la norme $\|\cdot\|$, définie par $\|A\| = \left(\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A)\right)^{\frac{1}{2}}$.

On se donne K une partie fermée de $\mathbf{R}^n$. On suppose qu'il existe R et r réels strictement positifs tels que :

$$\mathrm{B_f}(\mathbf{0}, r) \subset K \subset \mathrm{B_f}(\mathbf{0}, R),$$

où $\mathrm{B_f}(\mathbf{0}, \rho)$ désigne la boule fermée de centre $\mathbf{0}$ de rayon ρ.

On pose :

$$E = \{A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}), \forall X \in K, X^{\mathrm{T}}AX \leq 1\}.$$

1. On suppose dans cette seule question que $K = \mathrm{B_f}(\mathbf{0}, R)$. Montrer que l'application déterminant atteint son maximum sur E en un et un seul élément à déterminer.
2. On revient au cas général. Montrer que E est borné.
   On admet que E est fermé.
3. Montrer que l'application déterminant atteint son maximum sur E en un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.
4. Montrer que si l'on ne suppose plus $\mathrm{B_f}(\mathbf{0}, r) \subset K$, le résultat précédent est faux.

Oral 43

A. Justifiez l'existence de : $S := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ et $I := \int_0^x x^x \mathrm{d}x$. Montrer : $I = S$.

B. Soit A un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(A)^2 \leq \mathrm{rg}(A)\mathrm{tr}(A^2)$.

Oral 43

A. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ une fonction continue telle que pour tout réel t, $\mathrm{Sp}(S(t)) \subset [-\infty, -1]$

Montrer que toute solution du système $X' = S(t)X$ ont une limite nulle en $+\infty$.

B. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montrer que $24 | p^2 - 1$.

Oral 44 A. On admet que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

1. Est-ce-que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs ?
2. On considère $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) | M^2 = M\}$ Montrer que deux éléments de E appartiennent à la même composante connexe par arcs de E, si et seulement si ils ont même rang.

B. Pour tout n entier natrurel on définit $f_n \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \cos\left(\frac{nx}{n+1}\right)$.

1. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Etudier la convergence uniforme sur tout segment de la forme $[-a, a]$, $a \in \mathbf{R}_+^*$ puis sur $\mathbf{R}$.

INDICATIONS

Oral 1 A. bis. Soit N élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ à coefficients entier. On suppose qu'il existe un entier $d \geq 1$ tel que $N^d = I_2$. Montrer que $N^{12} = I_2$. La matrice est diagonalisable....

Son déterminant vaut ± 1, car inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$

Si le spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$ c'est facile.

Sinon N admet une valeur propre de la forme $\exp(\mathrm{i}\theta)$ où $\theta = \frac{k2\pi}{d}$ et $\theta \neq 0[\pi]$, l'autre est son conjugé donc quitte à changer on prend $k \in [1, \frac{d}{2}[$

Pour finir on regarde la trace qui est entière et vaut $2\cos\theta$.

Oral 2 A bis On considère l'ensemble H des éléments f de S_n tels que la classe de concruence modulo 2 de $f(i) - i$ soit indépendante de i, élément de $\{1, ..., n\}$.

Oral 3 A bis D'abord r convient prendre $G = \{\mathrm{diag}(z_1, ... z_r), (z_1, ..., z_r) \in \mathrm{U}_{d_1} \times ... \times \mathrm{U}_{d_r}\}$.

Réciproquement un tel groupe est isomorphe à $\mathrm{U}_{d_1} \times ... \times \mathrm{U}_{d_r}$ donc admet un sous-groupe H' isomorphe $U_{d_1}^n$. Donc $X^{d_1} - 1$ est annulateur et G est commutatif donc conjugué à un sous-groupe de matrices diagonales dont les éléments diagonaux sont dans U_{d_1}. On injecte ainsi H' dans $\mathrm{U}_{d_1}^n$ et on a vite $r \leq n$ ($d_1 \neq 1$).

Oral 5(A bis.) Si P de degré 1 alors il est surjectif. Soi P de degré 2 ou plus. Soit $q \in \mathcal{P}$. notons $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et après multiplication par un entier il est loisible de supposer ses coefficients entiers. Supposons que $\frac{u}{v}$ soit une fraction irréductible d'un antécédent de $\frac{1}{q}$. Alors tour à tour, $q | v^n$, $q | v$ et enfin $q | a_n u^n$. Si q n'est pas un facteur premier de a_n, il diviserait u contredisant l'interprimalité de u et v.

Il existe des solutions passant par l'analyse.

Oral 8 B. bis

On note pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $C_1, C_2, ..., C_n$ la première, deuxième et ultime colonne de M_n et pour $k = 1, 2, ..., n$,

$$A_k = \{C_k \in \mathrm{vect}(C_1, C_2, ... C_{k-1})\},$$

en convenant que C_0 est la colonne nulle. Étudier pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$.

Oral 10

1. Soit $t \in]-R, R[$. La convergence, pour tout $n \in \mathbf{N}$ de la série à termes positifs

$$\sum_{x \geq 0} \frac{|t|^n}{n!} x^n \mathbf{P}(Z = x)$$

de somme $\frac{M_n(Z)}{n!} |t|^n$, puis celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n(Z)}{n!} |t|^n$, assurent la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{|t|^n}{n!} x^n \mathbf{P}(Z = x)\right)_{(n,x) \in \mathbf{N}^2},$$

théorème de Fubini-Tonelli, donc par définition celle de

$$\left(\frac{t^n}{n!} x^n \mathbf{P}(Z = x)\right)_{(n,x) \in \mathbf{N}^2}.$$

Le théorème de Fubuni-Lebesgue vient alors nous dire par interversion des sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_n(Z)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{x=0}^{+\infty} x^n \mathbf{P}(Z = x) = \sum_{x=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} x^n \mathbf{P}(Z = x) = \sum_{x=0}^{+\infty} \exp(tx) \mathbf{P}(Z = x).$$

Donc $\exp(tZ)$ est d'espérance finie et la précédente égalité s'écrit : $L_Z(t) = \mathrm{E}(\exp(tZ))$.

2. Soit t un réel tel que $|t| < \min\{R_1, R_2\}$. Soit R le rayon de convergence de la série exponentielle des moments de $X+Y$. On sait que

$$R \geq \min\{R_1, R_2\}.$$

Donc $|t| < R$ et alors par 1,

$$L_X(t)L_Y(t) = \mathrm{E}(\exp(tX))E(\exp(tY)) = \mathrm{E}(\exp(tX)\exp(tY)) = \mathrm{E}(t(X+Y)) = L_{X+Y}(t),$$

en utilisant l'indépendance de $\exp(tX)$ et de $\exp(tY)$, héritée de celle de X et Y.

3. D'abord, pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $i \in \{1, ..., n\}$ et tout $k \in \mathbf{N}$,

$$X_{n,i}{}^k = \begin{cases} X_{n,1} & \text{si } k \geq 1, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc la série exponentielle des moments est $1 + \frac{\lambda}{n} \sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n!} t^n$, infini est son rayon et

$$L_{X_{n,i}} = 1 + \frac{\lambda}{n}(\mathrm{e}^t - 1).$$

La lemme admis et la précédente question conduisent par récurrence immédiate à

$$L_{S_n} = L_{X_{n,1}} L_{X_{n,2}} ... L_{X_{n,n}} = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(\mathrm{e}^t - 1)\right)^n.$$

pour tout entier $n \geq 2$.
On peut aussi utiliser que S_n suit une loi binomiale, ce qui contourne l'utilisation du lemme de coalition.
D'abord pour tout réel t, $\sum\limits_{k \geq 0} \exp(tk)\mathbf{P}(W = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k \geq 0} (\mathrm{e}^t)^k \frac{\lambda^k}{k!}$, donc $(\exp(tW))$ est d'espérance finie et :

$$\mathrm{E}(\exp(tW)) = \mathrm{e}^{-\lambda} \exp\left(\lambda \mathrm{e}^t\right) = \exp(\lambda(\mathrm{e}^t - 1)).$$

Calculons !

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{\lambda}{n}(\mathrm{e}^t - 1)\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}(\mathrm{e}^t - 1)\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{\lambda}{n}(\mathrm{e}^t - 1) + \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\lambda(\mathrm{e}^t - 1) + \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(1)\right).\end{aligned}$$

Donc pour tout réel t,

$$L_{S_n}(t) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathrm{E}(\exp(tW))$$

Il est possible de faire le lien avec la convergence en loi, d'une loi binomiale vers une loi de Poisson .

19 A bis Construire un morphisme du groupe G dans le groupe $(\{-1,1\},\times)$ tel que x et y aient par ce morphisme -1 comme image.

Oral 26

1. Par indépendance de X et Y, on a pour tout réel t

$$G_T(t) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \exp(\lambda(t-1))^2 = \exp(2\lambda(t-1)).$$

Donc $T \sim \mathcal{P}(2\lambda)$. Le cours dit : $\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{V}(X+Y) = 2\lambda$.

2. Soit $\omega \in \Omega$. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables. $A(\omega)$ est diagonalisable si et seulement si :
— ou bien $X(\omega) \neq Y(\omega)$;
— ou bien $X(\omega) = Y(\omega) = 0$.
En effet une matrice carrée d'ordre 2 ayant deux valeurs propres distinctes est diagonalisable et une matrice carrée d'ordre 2 ayant deux valeurs propres égales est diagonalisable si et seulement si elle est semblable, donc égale à une matrice d'homothétie (éventuellement de rapport 0).
Donc $\{A \in \mathcal{D}\}$ est la réunion disjointe de $\{X = Y = 0\}$ et de $\{X \neq Y\}$.
D'une part par 1., $\mathbf{P}\{X = Y = 0\} = \mathbf{P}\{X + Y = 0\} = \mathrm{e}^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^0}{0!} = \mathrm{e}^{-2\lambda}$.
Par ailleurs $\{X \neq Y\} = \biguplus_{n\in\mathbf{N}} \{X = n, Y \neq n\}$ et donc par indépendance de X et Y,

$$\mathbf{P}(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)(1-\mathbf{P}(Y = n)) = 1-\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(Y = n) = 1-\mathrm{e}^{-2\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(n!)^2}.$$

Au total $\mathbf{P}\{A \in \mathcal{D}\} = 1 + \mathrm{e}^{-2\lambda}\left(1 - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(n!)^2}\right)$

3. Soient x et y des réels étudions pour commencer le rang de l'application linéaire

$$\ell_{x,y} \ : \ \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto A_{x,y}M,$$

où $A_{x,y}$ est la matrice $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y\end{pmatrix}$
Envisageons les quatre cas possibles.
• x et y sont non nuls.
Alors $A_{x,y}$ est inversible et $\ell_{x,y}$ également, d'inverse

$$\ell_{x,y} \ : \ \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto A_{x,y}^{-1}M,$$

donc de rang maximal 6.
• x et y sont nuls. Alors L est application nulle donc de rang 0.
• x est nul et y non nul. Soit alors $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c'\end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ noté M. On a $A_{0,y}M = y\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & c'\end{pmatrix}$. Donc $\ker(\ell_{0,y})$ est l'espace vectoriel de dimension 3

$$\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

La formule du rang affirme que $\mathrm{rg}(\ell_{x,y}) = 6 - 3 = 3$.

• x est non nul et y est nul. On a $A_{x,0}M = x\begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c'+c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\ker(\ell_{x,0})$ est l'espace vectoriel

$$\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

La liberté de cette famille étant claire, on a $\text{rg}(\ell_{x,y}) = 6 - 3 = 3$.

La loi de R, grâce à l'indépendance de X et Y est donc donnée par :
— $\mathbf{P}(R = 6) = \mathbf{P}(X \neq 0, Y \neq 0) = \mathbf{P}(X \neq 0)\mathbf{P}(Y \neq 0) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)^2$;
— $\mathbf{P}(R = 0) = \mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0)\mathbf{P}(Y = 0) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^2$;
— $\mathbf{P}(R = 3) = \mathbf{P}(X = 0, Y \neq 0) + \mathbf{P}(X \neq 0, Y = 0) = 2\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)$.

Oral 42 —Ellipsoïde de John —

1. Soit A un élément de E. Soit $\mathcal{B} = (F_1, F_2, ..., F_n)$ une base de $\mathbf{R}^n$, orthonormée pour la structure euclidienne canonique de ce dernier, constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A. Pour tout X élément de $\mathbf{R}^n$ et en notant pour $i = 1, 2, ..., n$, x_i sa i^{e} coordonnée dans $\mathcal{B}$,
$$X^{\mathrm{T}}AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \tag{2}$$
où λ_i est la valeur propre associée à F_i, pour $i = 1, ..., n$. Pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, $RF_i \in K$ et en prenant dans (2) RF_i pour X,
$$\lambda_i R^2 \leq 1$$
Donc d'une part $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \frac{1}{R^{2n}}$ et d'autre part $\det(A) = \frac{1}{R^{2n}}$ si et seulement si $A = \frac{1}{R}I_n$ (qui est trivialement élément de E).
2. Comme $\mathrm{B_f}(\mathbf{0}, r) \subset K$, en raisonnant comme pour 1, dont on conserve les notations, on montre que si $A \in E$ alors :
$$\lambda_i r^2 \leq 1\,;$$
mais, comme P est orthogonale,
$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}A =& (P\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1})^{\mathrm{T}}P\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1} \\ =& P\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{\mathrm{T}}P\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{\mathrm{T}} \\ =& P\text{diag}(\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2)P^{-1}. \end{aligned}$$
et donc
$$\|A\|^2 = \mathrm{Tr}\left(P\text{diag}(\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2)P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(\text{diag}(\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2)\right) \leq \frac{n}{r^4}.$$
On peut montrer que E est fermé.
3. Montrons que K est non vide. Soit $X \in K$, comme $K \subset \mathrm{B_f}(\mathbf{0}, R)$
$$X^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{R}I_n\right)X = \frac{1}{R}\|X\|_2 \leq 1.$$
et comme $\frac{1}{R}I_n \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})^+$, $\frac{1}{R}I_n$ est un élément de E.
L'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ car polynomiale en les coefficients de la matrice qui sont ses coordonnées dans la base canonique, elle atteint donc son maximum sur l'ensemble fermé, borné, non vide E en un élément A^* de $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.

Comme $\frac{1}{R} \in E$,

$$\det(A^*) \geq \det\left(\frac{1}{R} I_n\right) = \frac{1}{R^n} > 0,$$

donc A^* est élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

4. Prenons pour K le segment $[(-1,0,...,0);(1,0,...,0)]$, autrement dit

$$K = \{(x_1, 0, ..., 0)^{\mathrm{T}} | -1 \leq x_1 \leq 1\}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ posons $A_k = \operatorname{diag}(1, k, k, ..., k)$; alors pour tout $x_1 \in [-1, 1]$, en posant $X = (x_1, 0, ..., 0)^{\mathrm{T}}$,

$$X^{\mathrm{T}} A_k X = 1 \times x_1^2 \leq 1.$$

Donc $A_k \in E$ et $\det A_k = k^n$. Donc l'application déterminant n'est pas majorée sur K.

Donner une interprétation géométrique du résultat en terme de boules pour les différentes normes euclidiennes...