Devoir Maison n° 0

À rédiger pour le mardi 3 septembre 2024.

Les résultats doivent être encadrés et les copies-doubles numérotées.

Exercice 1.

1. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $p \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ un projecteur, *i. e.*, une application linéaire qui vérifie $p \circ p = p$. On note $r = \mathrm{rg}(p)$.
   (a) (Cours) Démontrer que $\mathrm{E} = \mathrm{im}(p) \oplus \ker p$ et que $\mathrm{im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
   (b) Déterminer une base $\mathscr{B}$ de E telle que
   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\, p = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$
   (c) En déduire que $\mathrm{rg}\, p = \mathrm{tr}\, p$.
2. On considère des variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ indépendantes, définies sur le même univers Ω et qui suivent la même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.
   Soit $\mathrm{M} : \Omega \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une variable aléatoire telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathrm{M}(\omega)$ est une matrice semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_n(\omega))$.
   On note $\mathrm{T} = \mathrm{tr}(\mathrm{M})$, qui est encore une variable aléatoire.
   (a) Justifier que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathrm{M}(\omega)$ est une matrice de projecteur.
   (b) Déterminer $\mathrm{T}(\Omega)$, *i. e.*, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.
   (c) Déterminer la loi de la variable T, ainsi que son espérance.
3. En déduire la loi de la variable aléatoire $\mathrm{R} = \mathrm{rg}\, \mathrm{M}$.
4. On note D la variable aléatoire $\det \mathrm{M}$.
   (a) Déterminer $\mathrm{D}(\Omega)$.
   (b) Déterminer la loi de D, ainsi que son espérance.
5. On note $\mathrm{Z} = \{\omega \in \Omega,\ \ker(\mathrm{M}(\omega)) = \ker(\mathrm{M}(\omega) - \mathrm{I}_n)\}$.
   (a) Déterminer la probabilité de l'évènement $(\mathrm{M} = \mathrm{I}_n) \cup (\mathrm{M} = 0_n)$.
   (b) On suppose que n est impair. Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{Z})$.
   (c) On suppose que n est pair et on note $n = 2r$.
   Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{T} = r)$ et en déduire $\mathbf{P}(\mathrm{Z})$.
6. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\mathrm{U}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1(\omega) \\ \vdots \\ \mathrm{X}_n(\omega) \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}(\omega) = \mathrm{U}(\omega)(\mathrm{U}(\omega))^\top$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $a_{ij}(\omega)$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice aléatoire A.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire a_{ij}.
   (b) Déterminer les valeurs prises par $\mathrm{rg}\, \mathrm{A}$, puis la loi de la variable aléatoire $\mathrm{rg}\, \mathrm{A}$.
   (c) Calculer A^2 et en déduire la probabilité de l'évènement « A est une matrice nilpotente ».

Exercice 2. On désigne par E l'espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ continues.

1. **Un endomorphisme de** E

   (a) Pour tout élément f de E, on définit l'application

   $$\Phi(f)\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$

   Pour tout élément f de E, justifier que $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner l'expression de sa dérivée.

   Pour tout élément f de E, on désigne par $\Psi(f)$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

   $$\forall x \in \mathbf{R}_+, \Psi(f)(x) = \int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Exprimer pour tout réel x **strictement positif**, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $\Phi(f)(x)$.

   (c) Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est élément de **E** et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

   (d) Montrer que $\Psi\ :\ \mathrm{E} \to \mathrm{E}\,;\ f \mapsto \Psi(f)$ est un endomorphisme de E.

2. **Surjectivité et injectivité de** Ψ

   Soit l'application

   $$h\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon}. \end{cases}$$

   (a) Montrer que la fonction h est continue.

   (b) La fonction h est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?

   (c) Soit $g \in \mathrm{im}(\Psi)$.
   Montrer que la fonction $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto g(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

   (d) l'endomorphisme est-il surjectif ?

   (e) Montrer que Ψ est injectif.

3. **Éléments propres de** Ψ

   On s'intéresse dans cette question à l'ensemble S des réels λ tels que $\ker(\Psi - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ ne se réduise pas à l'application nulle, autrement dit aux réels λ tels qu'il existe un élément f **non nul** de E vérifiant :
   $\Psi(f) = \lambda f$.
   On notera pour tout $\lambda \in \mathrm{S}$, $\mathrm{E}_\lambda = \ker(\Psi - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

   (a) Le réel 0 est-il élément de S ?

   (b) Soit un réel μ Déterminer l'ensemble A_μ des solutions définies sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle suivante :

   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mu}{x} = 0. \tag{e}$$

   (c) Pour quelles valeurs de μ les éléments non nuls de A_μ sont-ils prolongeables par continuité à $\mathbf{R}_+$?

   (d) Pour quelles valeurs de μ les éléments non nuls de A_μ admettent-ils un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbf{R}_+$?

   (e) Déterminer l'ensemble S ainsi que pour tout élément λ de S le sous-espace vectoriel E_λ.
   On pourra, pour un éventuel élément f de S, *montrer que* $\Phi(f)$ *vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.*

4. **Un sous-espace vectoriel** F_n **de E**

   Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $i = 1, \ldots, n$ on pose :

   $$f_i\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto x^i \text{ et } g_i\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto x^i \ln(x).$$

On note $\mathscr{B}$ la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel engendré par cette famille.
On se propose de montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F_n.

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1 \dots, \beta_n)$ une famille de réels telle que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ soit l'application nulle de $\mathbf{R}_+$.

(a) Montrer que α_1 et β_1 sont nuls.

(b) Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \cdots = \alpha_p = \beta_p$.
Montrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1}$.

(c) En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de F_n.

5. **Stabilité de F_n par Ψ**

(a) Soient un réel $x > 0$ et un entier $p \geq 1$. Calculer pour tout élément i de $[\![1, n]\!]$,

$$\int_0^x g_i(t)\mathrm{d}t.$$

On pourra commencer par calculer $\int_\varepsilon^x g_i(t)\mathrm{d}t$, où $\varepsilon \in]0, x[$.

(b) En déduire que Ψ induit un endomorphisme sur F_n ; on le notera Ψ_n.

(c) Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathscr{B}$.

(d) Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

(e) Soit l'application

$$z \;:\; \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \begin{cases} (x + x^2)\ln(x), & \text{si } x > 0, \\ 0, \text{ sinon .} \end{cases}$$

Après avoir vérifié que z est élément de F_n, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

6. (Facultatif) On munit E du produit scalaire usuel $(\cdot|\cdot)$ défini par :

$$\forall (f, g) \in \mathrm{E}^2, (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit également un endomorphisme Φ^* de E par

$$\forall f \in \mathrm{E}, \Phi^*(f) \;:\; \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \int_x^1 f(u)\,\mathrm{d}u.$$

On ne demande pas de vérifier que Φ^* est un endomorphisme et on admet également que Φ en est un.

(a) Montrer que pour tout couple (f, g) d'éléments de E,

$$(\Phi(f)|g) = (f|\Phi^*(g)).$$

(b) On note S' l'ensemble des réels λ tels que $\ker(\Phi^* \circ \Phi - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$ ne se réduise pas à l'application nulle et, pour tout λ élément de S', on pose $\mathrm{E}'_\lambda = \ker(\Phi^* \circ \Phi - \lambda \mathrm{id}_\mathrm{E})$.
Montrer que $\mathrm{S}' \subset \mathbf{R}_+$.

(c) Déterminer S' et, pour tout $\lambda \in \mathrm{S}'$, le sous-espace vectoriel E'_λ.