Programme de colles n°1

3. *Même question pour équivalents. On donnera une preuve par densité algébrique, une utilisant les opérations élémentaires, et une le déterminant.*

Solution.

Le rang d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne change pas si on l'identifie à un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Donnons trois preuves.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et r son rang.

PREUVE 1. On peut trouver U et V produits de matrices de transvections, de permutations et de dilatations telles que

$$A = UJ_rV$$

l'examen de l'algorithme employé (voir cours) montre que les coefficients de ces matrices sont réels donc le rang de A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est le même.

PREUVE 2. Notons r' le rang de A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

On dispose de r' colonnes de A indépendantes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. elles sont *a fortiori* indépendantes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$; Donc $r \geq r'$.

Soit de même r colonnes indépendantes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, disons $C_{j_1}, C_{j_2}, ..., C_{j_r}$. Soit $\lambda_1, ...\lambda_r$ des complexes tels que

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k C_{j_k} = O_{n,1}.$$

En notant α_k pour $k = 1, ..., r$, la partie réelle de λ_k et β_k sa partie imaginaire,

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k C_{j_k} = O_{n,1} \text{ et } \sum_{k=1}^{r} \beta_k C_{j_k} = O_{n,1}.$$

Donc par liberté dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ des C_{j_k}, on a $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$ et $\beta_1 = ... = \beta_k$, donc

$$\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0.$$

Donc $(C_{j_1}, C_{j_2}, ..., C_{j_r})$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbf{C})$, et donc $r' \geq r$.

Au total : $r = r'$.

PREUVE 3. Le rang de A comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est la taille maximale d'une sous-matrice carrée inversible. l'inversibilité d'une sous matrice de A équivaut à la non nullité de son déterminant qui est le même, qu'on la considère à coefficients réels ou complexes. Donc le rang de A est le même comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Donc si A et B, éléments de $Mnn\mathbf{R}$ sont équivalents dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, alors ils ont même rang dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, donc dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et donc sont équivalents dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

7. *L'ensemble $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique Pour toute permutation σ élément de S_n, on note P_σ la matrice de permutation associée à σ On pose :*

$$P := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} P_\sigma.$$

1. *Montrer que l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ associé canoniquement à P est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.*
2. *Montrer que p est orthogonale.*
3. *On munit S_n d'une probabilité uniforme et l'on désigne par X la variable aléatoire qui à σ élément de S_n associe le nombre de points fixes de σ. Calculer l'espérence de X.*

Solution.

La base canonique de $\mathbf{R}^n$ sera notée $(E_1, ..., E_n)$.

1. Soit $\sigma_0 \in \mathrm{S}_n$
$$P_{\sigma_0} P = P_{\sigma_0} \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} P_\tau = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} P_{\sigma \circ \tau}.$$
Soit l'application
$$\phi_{\sigma_0} \ : \ \mathrm{S}_n \to \mathrm{S}_n \ ; \ \tau \mapsto \sigma_0 \circ \tau.$$
Comme $\phi_{\sigma_0} \circ \phi_{\sigma_0^{-1}} = \mathrm{id}_{S_n}$ et $\phi_{\sigma_0}^{-1} \circ \phi_{\sigma_0} = \mathrm{id}_{\mathrm{S}_n}$ on a ϕ_{σ_0} bijective. Donc
$$P_{\sigma_0} P == \frac{1}{n!} \sum_{\tau' \in \mathrm{S}_n} P_{\tau'} = P.$$
Donc
$$P \circ P = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} P_\sigma \circ P = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} P = P.$$
L'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ associé canoniquement à P est donc une projection.
DÉTERMINATION DU NOYAU ET DE L'IMAGE DE p.
Remarquons que pour i et j élémentS de $\{1, ..., n\}$ distincts on a $P(E_i) = P(E_j)$. En effet en notant $\tau := (i, j)$?
$$PE_j = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} P_\sigma E_j = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} E_{\sigma(j)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} E_{\sigma \circ \tau(i)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in \mathrm{S}_n} E_{\sigma' i)} = PE_i,$$
en raisonnant comme précédemment.
Donc les vecteurs $(E_2 - E_1), (E_3 - E_1), ..., (E_n - E_1)$ sont des vecteurs du noyaux indépendants (par exemple, leur matrice dans la base canonique admet comme sous-matrice de taille $n-1$ inversible celle obtenue en enlevant la dernière ligne). Donc $\ker(p)$ est de dimension $n-1$ ou n.
Par ailleurs
$$P(E_1 + ... + E_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \left(\sum_{j=1}^{n} E_{\sigma j)} \right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (E_1 + ...E_k) = E_1 + ... + E_n,$$
par bijectivité des éléments σ de S_n.
Donc p n'est pas nul et donc $\dim(\ker)(p) = n-1$ et donc $\dim(\mathrm{im})(p) = 1$
enfin
$$\mathrm{im}(p) = \mathrm{vect}(\mathrm{E_1 + ... + E_n}) \text{ et } \mathrm{ker(p) = vect(E_2 - E_1 + E_3 - E_1 + ... + E_n - E_1)}.$$
2. On vérifie instantanément que $\mathrm{im}(p)$ et $\ker(p)$ sont orthogonaux puisque tout vecteur de la base du noyau exhibée est orthogonal au vecteur directeur de l'image.
3. D'abord pour tout élément σ de S_n on a $X(\sigma)$ est le nombre de 1 sur la diagonale de P_σ ou encore la trace de P_σ. Donc :
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathbf{P}(\sigma) X(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \frac{1}{n!} \mathrm{tr}(P_\sigma) = \mathrm{tr}(P) = \mathrm{rg}(P) = 1.$$