Corrigé du DM n° 0

Exercice 1.

1. (a) Soit $x \in \mathrm{E}$; on a $x = p(x) + (x - p(x))$. Immédiatement, $p(x) \in \operatorname{im} p$, et $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$, donc $x - p(x) \in \ker p$. On a montré que $\mathrm{E} = \operatorname{im} p + \ker p$. Soit $x \in \operatorname{im} p \cap \ker p$. Il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = p(y)$. Comme $x \in \ker p$, on a $p^2(y) = 0$; or $p^2 = p$, donc $p(y) = 0$, *i. e.*, $x = 0$. On a montré que $\mathrm{E} = \operatorname{im} p \oplus \ker p$.

   On a $(p - \mathrm{Id_E}) \circ p = 0$, donc $\operatorname{im} p \subseteq \ker(p - \mathrm{Id_E})$. Soit $x \in \ker(p - \mathrm{Id_E})$; alors $x = p(x)$, donc $x \in \operatorname{im} p$. On a montré par double inclusion que $\operatorname{im} p = \ker(p - \mathrm{Id_E})$.

   (b) D'après la question précédente, il existe une base $\mathscr{B}$ de E de la forme $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ où $\mathscr{B}_1$ est une base de $\operatorname{im} p$ et $\mathscr{B}_2$ est une base de $\ker p$ (base dite *adaptée* à la somme directe). D'après la question précédente, un élément $x \in \operatorname{im} p$ vérifie $p(x) = x$ et un élément $x \in \ker p$ vérifie par définition $p(x) = 0$. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} p = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

   (c) Le rang et la trace d'un endomorphisme sont invariants par changement de base ; en appelant M la matrice de la question précédente, il suffit de vérifier que $\operatorname{rg} \mathrm{M} = r = \operatorname{tr} \mathrm{M}$.

2. (a) Soit $\omega \in \Omega$; il existe une matrice inversible $\mathrm{P}(\omega)$ telle que $\mathrm{M}(\omega) = \mathrm{P}\mathrm{Diag}(\mathrm{X}_1(\omega), \ldots, \mathrm{X}_n(\omega))\mathrm{P}(\omega)^{-1}$. Les X_i étant des variables de Bernoulli, on a $\mathrm{X}_i^2 = \mathrm{X}_i$ et donc $\mathrm{M}(\omega)^2 = \mathrm{P}\mathrm{Diag}(\mathrm{X}_1(\omega)^2, \ldots, \mathrm{X}_n(\omega)^2)\mathrm{P}(\omega)^{-1} = \mathrm{M}(\omega)$. On conclut que $\mathrm{M}(\omega)$ est une matrice de projecteur.

   (b) Pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathrm{X}_i(\omega) \in \{0, 1\}$, donc $\mathrm{T}(\omega) \in [\![0, n]\!]$. On conclut que $\mathrm{T}(\Omega) \subseteq [\![0, n]\!]$.

   (c) La variable T est une somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p. D'après le cours, T suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Toujours d'après le cours, on a $\mathbf{E}(\mathrm{T}) = np$.

3. D'après 2(a), pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathrm{M}(\omega)$ est une matrice de projecteur donc $\operatorname{tr} \mathrm{M}(\omega) = \operatorname{rg} \mathrm{M}(\omega)$. On a donc $\mathrm{R} = \mathrm{T}$ qui suit aussi la loi $\mathscr{B}(n, p)$.

4. (a) Pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathrm{M}(\omega)$ est semblable à une matrice diagonale dont le déterminant est $\mathrm{X}_1(\omega) \cdots \mathrm{X}_n(\omega)$ qui vaut 0 ou 1.

   (b) Ainsi, D suit une loi de Bernoulli. On a $\mathbf{P}(\mathrm{D} = 1) = \mathbf{P}(\mathrm{M} = \mathrm{I}_n) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 1, \ldots, \mathrm{X}_n = 1) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 1)^n = p^n$ par indépendance des X_i. La variable D suit la loi $\mathscr{B}(p^n)$, dont l'espérance est égale à p^n.

5. (a) Les évènements $(\mathrm{M} = \mathrm{I}_n)$ et $(\mathrm{M} = 0_n)$ sont incompatibles, donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}((\mathrm{M} = \mathrm{I}_n) \cup (\mathrm{M} = 0_n)) &= \mathbf{P}(\mathrm{M} = \mathrm{I}_n) + \mathbf{P}(\mathrm{M} = 0_n) \\ &= \mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 1, \ldots, \mathrm{X}_n = 1) + \mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 0, \ldots, \mathrm{X}_n = 0) = p^n + (1-p)^n\end{aligned}$$

   par indépendance des X_i.

   (b) On suppose que n est impair. Supposons que $\mathrm{Z} \neq \varnothing$; alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\dim \ker \mathrm{M}(\omega) = \dim \ker(\mathrm{M}(\omega) - \mathrm{I}_n)$. De plus, comme $\mathrm{M}(\omega)$ est une matrice de projecteur, on a $\dim \ker(\mathrm{M}(\omega) - \mathrm{I}_n) = \operatorname{rg} \mathrm{M}(\omega)$, et par le théorème du rang, $n = 2 \operatorname{rg} \mathrm{M}(\omega)$, absurde. Donc $\mathrm{Z} = \varnothing$ et par suite, $\mathbf{P}(\mathrm{Z}) = 0$.

(c) On suppose que n est pair et on note $n = 2r$. Comme T suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$, on a $\mathbf{P}(\mathrm{T} = r) = \binom{2r}{r} p^r (1-p)^r$. Par ailleurs, $\ker(\mathrm{M} - \mathrm{I}_n) = \operatorname{rg} \mathrm{M}$, donc par le théorème du rang, $\mathbf{P}(\mathrm{Z}) = \mathbf{P}(\mathrm{T} = r)$.

6. (a) Un calcul matriciel donne $a_{ij} = \mathrm{X}_i \mathrm{X}_j$. Donc a_{ij} suit une loi de Bernoulli et $\mathbf{P}(a_{ij} = 1) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_i = 1)\mathbf{P}(\mathrm{X}_j = 1) = p^2$ par indépendance.

(b) Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\operatorname{im} \mathrm{A}(\omega) \subseteq \operatorname{Vect} \mathrm{U}(\omega)$ donc $\operatorname{rg} \mathrm{A} \leqslant 1$. On a $\mathbf{P}(\operatorname{rg} \mathrm{A} = 0) = \mathbf{P}(\mathrm{A} = 0) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 0, \dots, \mathrm{X}_n = 0) = p^n$ par indépendance.

(c) On trouve $\mathrm{A}^2 = (\operatorname{tr} \mathrm{A})\mathrm{A}$, puis par récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{A}^k = (\operatorname{tr} \mathrm{A})^{k-1}\mathrm{A}$. Donc A est nilpotente si et seulement si $\operatorname{tr} \mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{A} = 0$. On remarque que $(\operatorname{tr} \mathrm{A} = 0) = (\mathrm{A} = 0)$ ici puisque $\operatorname{tr} \mathrm{A} = \mathrm{X}_1^2 + \cdots + \mathrm{X}_n^2$. Finalement, $\mathbf{P}(\operatorname{tr} \mathrm{A} = 0) = \mathbf{P}(\mathrm{X}_1 = 0) \cdots \mathbf{P}(\mathrm{X}_n = 0) = (1-p)^n$. La probabilité que A soit nilpotente est égale à $(1-p)^n$.

Correction de l'exercice 2

Remarques.

Les arguments importants sont en *italique*, les résultats soulignés. Dans le cadre d'une rédaction manuscrite d'un sujet, il faut souligner les arguments importants et encadrer les résultats.

Le texte en petits caractères fournit des commentaires, qui ne doivent pas figurer dans une copie.

1. **Un endomorphisme de** E

Soit f un élément de E. Comme f est *continue*, le théorème fondamental de l'analyse assure que $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que :

$$\underline{\Phi(f)' = f.}$$

(a) Soit x un réel non nul. L'application $[0,1] \to [0,x]$; $t \mapsto tx$ est de classe $\mathscr{C}^1$ donc par changement de variable « $u = tx$ »,

$$\underline{\Psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(tx)\, x\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\Phi(f)(x).}$$

Le programme invite à ne pas justifier les changements de variables simples comme celui-ci, toutefois, nous l'avons fait pour rappeler en ce début d'année les hypothèses du théorème.

(b) Immédiatement on a : $\underline{\Psi(f)(0) = \int_0^1 f(t \times 0)\mathrm{d}t = f(0).}$

• La restriction de $\Psi(f)$ àl'intervalle *ouvert* est continue comme produit de telles applications (cf.(a)), donc $\Psi(f)$ est continue en tout point de $\mathbf{R}_+^*$.

• Par (a), $\Phi(f)$ est en particulier dérivable en 0 de dérivée $f(0)$, donc :

$$\Psi(f)(x) = \frac{\Phi(f)(x) - \Phi(f)(0)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} (\Phi(f))'(0) = f(0) = \Psi(f)(0).$$

Donc $\Psi(f)$ est continue en 0.

De ces deux points vient que $\Psi(f)$ est continue, et donc $\underline{\Psi(f) \in \mathrm{E}.}$

Les 5/2 auraient pu utiliser le théorème de continuité d'une intégrale àparamètre.

(c) Soient f_1, f_2 des éléments de $\mathbf{E}$ et λ_1, λ_2 des réels. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= \int_0^1 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(tx)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \lambda_1 f_1(tx) + \lambda_2 f_2(tx)\mathrm{d}t = \lambda_1 \int_0^1 f_1(tx)\mathrm{d}t = \lambda_2 \int_0^1 f_2(tx)\mathrm{d}t \\ &= (\lambda_1 \Psi(f_1) + \lambda_2 \Psi(f_2))(x),\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale. Donc Ψ est linéaire de $\mathbf{E}$ dans lui-même (cf. c) :

$$\underline{\Psi \subset \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$$

On pouvait opter pour une preuve plus concise et plus conceptuelle, sans grand risque de perte de points : la linéarité de $\mathbf{E} \to \mathbf{E}\,;\ f \mapsto f(\cdot\, x)$ *et de l'intégration sur* $[0,1]$*, donnent par composition celle de* Ψ*...*

2. **Surjectivité et injectivité de** Ψ

(a)

• La restriction de h àl'intervalle *ouvert* $\mathbf{R}_+^*$ est continue par les théorèmes de transfert, donc h est continue en tout point de $\mathbf{R}_+^*$.

• Pour tout réel $x > 0$,

$$0 \leq |h(x)| \leq x \times 1,$$

donc, par encadrement $h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = h(0)$, donc h est continue en 0.

De ces deux points vient <u>la continuité de h.</u>

(b) Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 par valeurs strictment positives, cependant pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite $\left(\dfrac{h(x_n) - h(0)}{x_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ qui vaut $((-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite. Donc en particulier h n'est pas dérivable en 0 et *a fortiori* <u>h n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.</u>

(c) Soit f un antécédent de g par Ψ. D'après 1.(a) et la nullité de $\Phi(f)$ en 0, $\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+} g = \Phi(f)$, donc par 1.(a), <u>$\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+} g$ est de classe $\mathscr{C}^1$.</u>

(d) La restriction de l'application $\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+} h$ à$\mathbf{R}_+^*$ est dérivable de dérivée :

$$\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\,h(x).$$

D'une part l'application $2\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+} h$ admet une limite en 0 car continue, d'autre part $x \mapsto -\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'en n'admet pas puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos\left(\frac{1}{n\pi}\right) = (-1)^n$ et $\frac{1}{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $(\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+} h)'(x)$ n'a pas de limite en 0, *a fortiori* $\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+} h$ n'est pas $\mathscr{C}^1$. Donc h est un élément de E sans antécédent par Ψ, d'après (c). Concluons :

$$\underline{\Psi \text{ est non surjective.}}$$

Remarque : on montre sans mal par contre que $\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+} h$ *est dérivable en zéro, en regardant le taux d'accroissement en ce point, donc dérivable.*

(e) Soit f_1 et f_2 des éléments de $\mathbf{E}$ ayant même image par Ψ. Alors par 1. (a), $\Phi(f_1)$ et $\Phi(f_2)$ coïncident sur $\mathbf{R}_+^*$, donc leur dérivées f_1 et f_2 aussi. Mais par *continuité* en 0 de f_1 et f_2, il vient : $f_1 = f_2$. Donc <u>Ψ est injective.</u>

Bien qu'il soit le jour du concours inutile de détailler davantage, précisons l'ultime argument. On a pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_1(x) = f_2(x)$*, en laissant tendre* x *vers* 0*, par valeurs supérieurs dans cette égalité, la continuité en* 0 *de* f_1 *et* f_2 *veut que* $f_1(0) = f_2(0)$*....*

3. **Éléments propres de** Ψ

(a) <u>Le réel 0 ne saurait être élément de S</u>, car l'injectivité de Ψ impose que

$$\ker(\Psi - 0 \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \ker(\Psi) = \{\mathbf{0}\},$$

oÃ¹ $\mathbf{0}$ désigne l'application nulle sur $\mathbf{R}_+$.

(b) Comme (e) est une équation linéaire du premier ordre à coefficients continus, d'après le cours de MPSI :

$$\underline{A_\mu = \operatorname{vect}\left(f_\mu\right),\ \text{oÃ}^1\ f_\mu\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \exp(-\mu\ln(t)) = t^{-\mu}.}$$

(c) Un élément non nul de A_μ est prolongeable par continuité à $\mathbf{R}_+$ si et seulement si il admet en 0 une limite, soit si et seulement si $\underline{\mu \leq 0}$. La valeur du prolongement en 0 est alors 1 ou 0 selon que μ soit nul ou non.

(d) Soit f un élément non nul de A_μ. Si f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ à$\mathbf{R}_+$ alors *a fortiori* il admet un prolongement continue et donc $\mu \leq 0$.

Supposons $\mu \leq 0$.

• Si f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbf{R}_+$ alors trivialement $f'(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

• Si $f'(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, f étant prolongeable par continuité, alors ce prolongement est en fait de classe $\mathscr{C}^1$, d'après le *Théorème de la limite de la dérivée*.

Donc f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ à $\mathbf{R}_+$ si et seulement si $f'(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 0. Or pour tout $f \in A_\mu$, et tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \begin{cases} -\mu x^{-\mu-1} \text{ si } \mu \neq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ à$\mathbf{R}_+$ si et seulement si

$$\underline{\mu \leq -1 \text{ ou } \mu = 0.}$$

(e) Soit λ un réel non nul.

• Supposons $\lambda \in S$. On dispose d'un élément f de E_λ, non nul. Par 1. (a), pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) + \frac{-\frac{1}{\lambda}}{x}\Phi(f)(x) = 0.$$

Donc $\Phi(f)$ est un élément de $A_{-\frac{1}{\lambda}}$, qui se prolonge à $\mathbf{R}_+$ en une application $\mathscr{C}^1$ (toujours 1.(a)). Donc par 3.(d), $-\frac{1}{\lambda} \leq -1$, soit : $0 < \lambda \leq 1$.

Ici, une illustration graphique comportant le graphe de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ serait sûrement fort appréciée du correcteur, et évite la discussion sur le signe de λ.

• Réciproquement supposons $0 < \lambda \leq 1$.

D'après 3.(d), tout élément $A_{-\frac{1}{\lambda}}$ admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$; soit F un tel prolongement. Par 3.(c) on a $F(0) = 0$ donc $F = \Phi(F')$ et par définition de $A_{-\frac{1}{\lambda}}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, 0 = \frac{1}{x}\Phi(F')(x) - \lambda F'(x) = \Psi(F')(x) - \lambda F'(x).$$

Par continuité de $\Psi(F')$ et de F' cette dernière égalité vaut aussi pour $x = 0$. Donc $F' \in \ker(\Psi - \lambda \mathrm{id}_E)$, comme F' est non nul par 3. (b), (F est non constante), on a $\lambda \in S$.

Par ces deux points et comme 0 n'est pas élément de S (cf. 3.(a)), on a montré que $S =]0,1]$. Le second point fournit alors, pour λ élément de S l'ensemble E_λ, par dérivation des prolongements de classe $\mathscr{C}^1$ des éléments de $A_{-\frac{1}{\lambda}}$:

$$E_\lambda = \operatorname{vect}(f_\lambda),\ \text{où } f_\lambda\ :\ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\lambda} t^{\frac{1}{\lambda}-1} \text{ si } t \neq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le coefficient $\frac{1}{\lambda}$ initial qui provient de la dérivation de la solution de (e) peut être omis.

4. **Un sous-espace vectoriel F_n de E**

   (a) Remarque : par convention prenons $g_i(0) = 0$.
   D'abord pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$0 = \frac{1}{x \ln x}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i\right)(x) = \beta_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{x^{i-1}}{\ln(x)} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i x^{i-1}\right) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \beta_1.$$

   Donc $\beta_1 = 0$.
   Ceci étant, par croissances comparées du logarithme et des puissances de x au voisinage de 0,

$$0 = \frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=2}^{n} \beta_i g_i\right)(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \alpha_1.$$

   Donc $\alpha_1 = 0$.

   (b) On suppose que $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \ldots = \alpha_p = \beta_p$.
   Par hypothèse $\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i g_i$ est nulle.
   Si β_{p+1} était non nul, alors on aurait

$$0 = \left(\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=p+1}^{n} \beta_i g_i\right)(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \beta_{p+1} x^{p+1} \ln(x),$$

   ce qui est absurde !
   En effet $\frac{0}{\beta_{p+1} x^{p+1} \ln(x)}$ *quantité nulle, ne peut pas tendre vers 1 lorsque* x *tend vers* 0. *On peut retenir plus généralement qu'une application est équivalente à0 au voisinage d'un point, si et seulement si elle est nulle au voisiange de ce point.*
   Donc $\beta_{p+1} = 0$.
   Alors, si α_{p+1} n'était pas nul on aurait

$$0 = \left(\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=p+1}^{n} \beta_i g_i\right)(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \alpha_{p+1} x^{p+1},$$

   ce qui est de nouveau absurde!
   Donc $\alpha_{p+1} = 0$.
   .

   (c) On a prouvé par récurrence finie que pour $i = 1, \ldots, n$, $\alpha_i = \beta_i = 0$, le (a) constitue l'initialisation, le (b) l'hérédité.
   Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre, comme elle engendre, par définition, F_n :

   la famille $\mathscr{B}$ est une base de F_n.

5. **Stabilité de F_n par Ψ**

   (a) Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$.
   Pour tout ε élément de $]0, x[$, par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^x g_i(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{i+1}\ln(t)}{i+1}\right]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x \frac{t^i}{i+1}\mathrm{d}t = \left[t^{i+1}\ln(t) - \frac{t^{i+1}}{(i+1)^2}\right]_\varepsilon^x.$$

   Comme g_i est continue, $\varepsilon \mapsto \int_\varepsilon^x g_i(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$, donc continue, si bien qu'en laissant tendre ε vers 0 dans l'égalité précédente,

$$\int_0^x g_i(t)\mathrm{d}t = x^{i+1}\ln(x) - \frac{x^{i+1}}{(i+1)^2} = \left(g_{i+1} - \frac{f_{i+1}}{(i+1)^2}\right)(x).$$

(b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

D'après 5.(a) et 1.(a), pour tout réel $x > 0$, on a $\Psi(g_i) = \frac{1}{x}\Phi(g_i)(x) = \left(g_i - \frac{f_i}{(i+1)^2}\right)(x)$. Par continuité en 0 de $\Psi(g_i)$, de g_i et de f_i,

$$\Psi(g_i) = g_i - \frac{f_i}{(i+1)^2} \in \mathrm{F}_n.$$

Comme aussi $\Psi(f_i) = \frac{f_i}{i+1} \in \mathrm{F}_n$, les images des éléments la *famille génératrice* B sont éléments de F_n, donc

$$\underline{\Psi \text{ induit un endomorphisme sur } \mathrm{F}_n.}$$

(c) D'après la question précédente :

$$\underline{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Psi_n) = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta^2 \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}}, \text{ oÃ¹ } \underline{\Delta = \mathrm{diag}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n+1}\right).}$$

(d) Par (c), et calcul du déterminant par blocs

$$\det(\Psi_n) = \det(\Delta)\det(\mathrm{I}_n) = (2 \times 3 \times \ldots \times n+1)^{-1} \neq 0.$$

Donc Ψ_n est inversible, donc $\underline{\Psi_n \text{ est un automorphisme de } \mathrm{F}_n.}$

(e) Remarquons que puisque $z = g_1 + g_2$, cette application est élément de F_n.

On pourrait considérer les cas $n = 2$ et inverser $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Psi_2)$ (matrice 4,4), il y a plus simple.

Pour $i = 1, 2$, on a $\Psi_n(g_i) = -\left(\frac{1}{i+1}\right)^2 f_i + g_i = -\frac{1}{i+1}\Psi_n(f_i) + g_i$. donc

$$g_i = \Psi_n\left(\frac{1}{i+1} f_i + g_i\right).$$

Donc par linéarité de Ψ_n,

$$\underline{\Psi_n^{-1}(z) = \frac{1}{2} f_1 + g_1 + \frac{1}{3} f_2 + g_2.}$$

6. (a) Soit un couple (f, g) d'éléments de E. Notons que $\Phi(f)$ et $-\Phi^*(g)$ sont des primitives respectives de f et de g, donc par intégration par parties,

$$(\Phi(f)|g) = \int_0^1 \Phi(f)(x)g(x)\mathrm{d}x = [-\Phi(f)\Phi^*(g)]_0^1 + \int_0^1 f(x)\Phi^*(g)(x)!.$$

Comme $\Phi(f)$ s'annule en 0 et $\Phi^*(g)$ en 1 :

$$\underline{(\Phi(f)|g) = (f|\Phi^*(g)).}$$

(b) Soit λ un éventuel élément *non nul* de S' et f de E'_λ. Alors par (a),

$$\lambda\|f\|^2 = (\lambda(f)|f) = (\Phi^*(\Phi(f))|f) = (\Phi(f)|(\Phi(f)) = \|\Phi(f)\|^2.$$

Comme $\|f\|$ est non nulle, λ, rapport de deux normes au carré, est positif ou nul. Donc $\underline{\mathrm{S}' \subset \mathbf{R}_+}$.

(c) • Soit toujours λ un éventuel élément *non nul* de S' et f un élément de E'_λ. On a pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$\lambda f(x) = \int_x^1 \left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t.$$

Une double application du théorème fondamental de l'analyse montre que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que

$$\lambda f' = -\Phi(f)\,;\ \lambda f'' = -f.$$

La non nullité de f assure celle de λ et que f est solution sur $\mathbf{R}_+$ de

$$y'' = \frac{1}{\lambda} y.$$

Donc il existe des réels A et B non tous deux nuls tels que f soit la restriction à$\mathbf{R}_+$ de :

$$\mathrm{A}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\cdot\right) + \mathrm{B}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\cdot\right).$$

Mais $0 = -\Phi(f)(0) = \lambda f'(0) = \lambda \mathrm{B}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donc B est nul, et donc $\mathrm{A} \neq 0$. Mais alors : $0 = \Phi^*(\Phi(f))(1) = \lambda f(1) = \lambda \mathrm{A}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$, donc il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

et donc tel que $\lambda = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi.\right)^{-2}$.

• Réciproquement, pour tout $k \in \mathbf{N}$, en posant $\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi.\right)^{-2}$, un simple calcul montre que pour tout réel A la restriction à $\mathbf{R}_+$ de $\mathrm{A}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\,\cdot\right)$ est élément de $\ker(\Phi^* \circ \Phi - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

Concluons : $\underline{\mathrm{S}' = \{\lambda_k,\, k \in \mathbf{N}\}}$, avec $\underline{\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2}}$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\underline{\mathrm{E}_{\lambda_k} = \operatorname{vect}\left(\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\,x\right)\right).}$$