Travaux dirigés n° 1

I. Matrices et endomorphismes nilpotents

Soit n un entier strictement positif et M une matrice d'ordre n à coefficients dans un sous-corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$. Nous dirons que M est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $M^k = 0_n$. Quand M est nilpotente, on appelle ordre de nilpotence de M le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positif k , tels que $M^k = 0_n$.

Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension n, et u un endomorphisme de $\mathbf{E}$. Nous dirons que u est nilpotente si, par définition, il existe un entier strictement positif, k, tel que : $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$. Quand u est nilpotente on appelle ordre de nilpotence de u le plus petit élément de l'ensemble des entiers strictement positifs k, tels que $u^k = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$.

1. Montrer que si M est la matrice de u dans une base de $\mathbf{E}$, alors M est nilpotente d'ordre p si et seulement si u est nipotent d'ordre p.
2. Nous supposons dans cette question que u est de rang 1, montrer que u est diagonalisable ou bien est nilpotent.
3. Pour tout entier naturel i on pose $N_i = \mathrm{Ker}(u^i)$ et $I_i = \mathrm{Im}(u^i)$.
   (a) Montrer que les suites $(N_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(I_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont monotones, pour l'inclusion, on précisera leur monotonie.
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel j tel que $N_j = N_{j+1}$. Montre alors que pour tout entier $i \geq j$, $N_i = N_{i+1}$ et $I_i = I_{i+1}$.
   (c) Soit j un entier naturel non nul. Montrer que $N_j = N_{j+1}$ si et seulement si $N_j \oplus I_j = \mathbf{E}$.
   (d) On suppose u nilpotent d'ordre p. On note j_0 le plus petit entier j tel que $N_j = N_{j+1}$, que vaut j_0 et N_{j_0}.
4. Montrer que si M est triangulaire supérieure stricte alors elle est nilpotente. Donner une matrice nilpotente qui n'est ni triangulaire supérieure stricte ni triangulaire inférieure stricte.
5. Nous supposons que M est nilpotent d'ordre n (n désigne toujours la dimension de $\mathbf{E}$).
   Montrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Montrer que l'élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$,
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   est nilpotent d'ordre 2. Déterminer une autre élément de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, nilpotent d'ordre 2, non semblable au précédent.

La fin du I est réservée à un public averti

Notons pour tout entier $k \geq 1$, J_k l'élément[1] de $\mathcal{M}_k(\mathbf{K})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et convenons que $J_1 = O_1$.

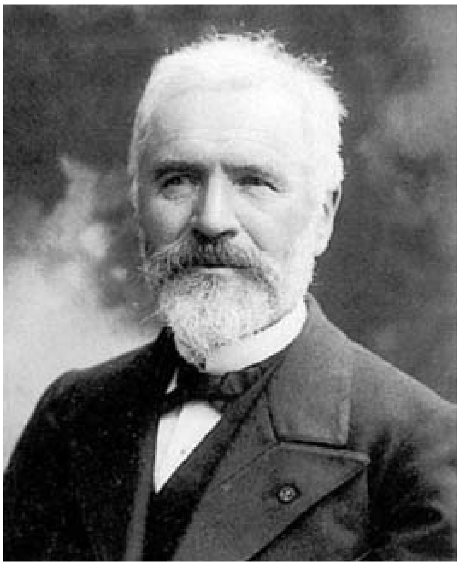

FIGURE 1 – CAMILLE JORDAN 1838–1922.
Professeur à l'École polytechnique puis au Collège de France ; on lui doit en autre la forme réduite des matrices qui porte son nom ainsi que la notion d'arc réctifiable.

Nous supposons que M est nilpotente d'ordre $p \geq 2$. On prend $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et l'on note u l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ canoniquement associé à M. Par r nous désignerons le rang de M.

7. Montrer que $p \leq n$.
8. CAS $p = 2$
   On suppose dans cette question que $p = 2$.
   (a) Montrer que $2r \leq n$.
   (b) Montrer que M est semblable à la matrice $\operatorname{dig}(\underbrace{J_2, J_2, ...J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{n-2r})$
9. FORME DE JORDAN DES MATRICES NILPOTENTES
   On revient au cas général.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im}(u)$ est nilpotent d'ordre p' à déterminer.
   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant :

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k, \quad \text{et } \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n,$$

1. Le J est en l'honneur de Camille Jordan (1838–1922), et cette notation ne doit pas être confondue avec celle du cours J_r pour l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\operatorname{diag}(I_r, O_{n-r})$

tel que M soit semblable à la matrice

$$\operatorname{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, ..., J_{\alpha_k}).$$

Indication : raisonner par récurence sur l'ordre de nilpotence de u.

10. Unicité de la forme de Jordan
    (a) Déterminer pout tout entier $j \geq 2$ et tout entier $\alpha \geq 1$ déterminer de ${J_\alpha}^j$. En déduire la valeur de α_1.
    (b) On suppose qu'il existe un entier naturel $h \geq 1$, un élément $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_h)$ de $(\mathbf{N}^*)^h$ vérifiant :
    $$\beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_h, \quad \text{et } \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_h = n,$$
    tel que M soit semblable à la matrice
    $$\operatorname{diag}(J_{\beta_1}, J_{\beta_2}, ..., J_{\beta_h}).$$
    Montrer que $h = k$ puis que $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_h) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$.
    Indication : étudier successivement le rang de $M^0, M^1, \ldots, M^{p-1}$
11. Montrer que M, $2M$ et ${}^tM$ sont semblables.

Nous reprendrons cette étude dans un prochain T.D. en vue d'établir la réduction de Jordan d'une matrice quelconque

II. Matrices semblables

1. Les matrices suivantes, éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ sont-elles semblables ?
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. Même question pour
$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Même question pour les éléments de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$:
$$E := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Même question pour les éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$:
$$G := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   G et H sont-elles semblables ?
5. Montrer que E est semblable à sa transposée.

III. Equivalence à J_r

1. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
2. Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note

$$P_{A,B} \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \ \lambda \mapsto \det(B + \lambda A).$$

   (a) Montrer que pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $P_{A,B}$ est une application polynomiale.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \max\{\deg P_{A,B} | B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\}$.
   (c) Montrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang.

IV. Espace vectoriel de matrices nilpotentes, pour 5/2
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Déterminer les éléments nilpotents de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.
2. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices nilpotentes.
3. Déterminer la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

V. Sous-espace vectoriel de matrices
Par n on désigne un entier naturel non nul. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ seront notés en colonne.
On s'intéresse aux sous-espaces vectoriels $\mathbf{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\mathbf{F} \setminus \{O_n\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

1. On suppose dans cette question et seulement dans cette question que $n = 2$. Exhiber un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ de dimension 2 tels que $\mathbf{F} \setminus \{O_2\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

   Dans toute la suite $\mathbf{F}$ désigne un sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $\mathbf{F} \setminus \{O_n\}$ soit inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

2. (a) En considérant

$$\phi \ : \ \mathbf{F} \to \mathbf{R}^n\,; \ M \mapsto MX_0,$$

   où X_0 est un élément non nul de $\mathbf{R}^n$, montrer que $\dim(\mathbf{F}) \leq n$.
   (b) Retrouver ce résultat en considérant l'ensemble $\mathbf{H}$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont la première colonne est nulle.
3. (**5/2 très provisoirement...**) On suppose que n est impaire. Montrer que $\dim \mathbf{F} \leq 1$.

⋆ ⋆
⋆

VI. Conjugaisons isométriques pour la norme de Frobenius
Par n sera désigné un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que l'application

$$\Phi \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}\,; \ M \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}M\, M)}$$

   est une norme.
2. Soient i et j des éléments de $\{1, ..., n\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Calculer $E_{i,j}A$ et $AE_{i,j}$.
3. Déterminer les éléments P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\Phi(PMP^{-1}) = \Phi(M).$$

Travaux dirigés n° 2

I. PRÉLUDE

Soient A un élément de $\mathbf{R}[X]$ et B un élément de $\mathbf{R}[X]$ de degré $n+1$, scindé à racines simples. Soit l'application φ de $\mathbf{R}[X]_n$ dans lui-même qui à un polynôme P, élément de $\mathbf{R}[X]_n$, associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de φ.

II. ÉCHAUFFEMENT

Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice suivante

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

III. MATRICES COMPAGNONS

Nous allons étudier des matrices d'une forme particulière qui jouent, comme nous le verrons, un rôle important en mathématiques. Nous verrons leur utilisation dans une preuve du théorème de Cayley-Hamilton. Elles se rencontrent également dans l'étude des équations différentielles linéaire d'ordre n à coefficients constants.

Par $\mathbf{K}$ on désigne indifféremment le corps des nombres complexes ou celui des nombres réels. Soient n un réel supérieur ou égal à 2 et $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ des éléments du corps $\mathbf{K}$. On désigne par A l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ suivant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Soit λ une valeur propre de A. Déterminer E_λ l'espace propre associé.
3. On suppose ue $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Montrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont d'ordre de multiplicité 1.

IV. Théorème de Kronecker

Les 3/2 admettront le résultat suivant qui sera vu très prochainement. Si le spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_p\}$, alors celui de M^k est, pour tout entier $k \geq 0$, $\{\lambda_1^k, \lambda_2, ..., \lambda_p^k\}$. Il le vérifierons pour une matrice diagonalisable cependant.

1. Soient z_1, z_2,...,z_n des nombres complexes, et P le polynôme
$$P = (X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n)$$
On suppose que P est à coefficients entier. Soit un entier $q \geq 2$. Montrer que
$$Q = (X - z_1^q)(X - z_2^q)\dots(X - z_n^q).$$
est à coefficients entiers.d

On se propose de montrer le théorème de Kronecker : *Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1. on suppose de plus que $P(0) \neq 0$. Montrer que toutes les racines de P sont des racines de l'unité.*

2. Exprimer les coefficients de P au moyen de ses racines.
3. Montrer que l'ensemble de tels polynômes est fini.
4. On note z_1, z_2,...z_n les racines de P. Montrer que
$$(X - z_1^k)(X - z_2^k)...(X - z_n^k)$$
vérifie pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, les propriétés de P.
5. Montrer que toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

V. ENDOMORPHISME DE $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Soit l'application
$$\Phi_A\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})\,;\ M \mapsto AM.$$

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme.
2. Donner le rang de Φ_A en fonction de celui de A.
3. En déduire que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.
4. (5/2) Retrouver ce résultat grâce au cours sur les polynômes d'endomorphisme.
5. Donner la trace de Φ_A.
6. Donner χ_{Φ_A}.

Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On se propose de montrer que l'équation d'inconnue X,
$$AX - XB = Y \tag{1}$$
admet une solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, quel que soit l'élément Y de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si A et B n'ont pas de valeurs propre commune.

7. On suppose A et B sans valeur propre commune. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,
$$\Phi\ :\ X \mapsto AX - XB.$$
   (a) Montrer que $\chi_A(B)$ et $\chi_B(A)$ sont inverisbles.
   (b) Soit Z un élément du noyau de Φ. Montrer que $\chi_B(A)Z = Z\chi_B(B)$. En déduire que Φ est injectif.
   (c) Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$l'équation (1) admet une solution.
8. On suppose que A et B ont une valeur propre λ en commun. Et soit X_1 (resp. X_2) un vecteur propre de A (resp. B) associé à λ.

(a) En considérant $M = X_1 X_2^\top$ montrer que le noyau de Φ est non nul.

(b) Montrer qu'il existe des éléments $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tels que l'équation (1) n'admette pas de solution.

9. Conclure.

Par A on désigne toujours un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$\Psi_A \ : \ X \mapsto AXA.$$

10. Montrer que Ψ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

11. En supposant A réelle, montrer que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ induit par Ψ_A est une isométie pour la norme euclidienne canonique, si et seulement si A est orthogonale.

VI. MÉTHODE DES PUISSANCES POUR LE CALCUL DE VALEURS PROPRES

Par n on désigne un entier supérieur ou égal à 2. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ sont notés en colonne. et $\mathbf{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique, notée $\|\cdot\|$.

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant n valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2,...,λ_n non nulles dont les modules sont classés dans l'ordre inverse :

$$0 < |\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| < ... < |\lambda_2| < |\lambda_1|$$

Pour $i = 1, \ldots, n$ V_i désigne un vecteur propre unitaire associé à λ_i.
On se propose de calculer numériquement λ_1 et V_1
Soit A un élément de $\mathbf{R}^n$ qui n'est pas élément de vect$(V_2, V_3, ..., V_n)$ [2]

1. Montrer que $(V_1, V_2, ..., V_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$. On note a_i la i^{e} coordonnée de A dans la base $(V_1, V_2, ..., V_n)$, pour $i = 1, 2, ..., n$.

2. On définit les suites $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(r_k)_{k\in\mathbf{N}}$ par :
$X(0) = A$, $Y_0 = \frac{X_0}{\|X_0\|}$, $r_0 =^{\text{t}} Y_0 M Y_0$ et pour tout entier $k \geq 1$,

$$\begin{cases} X_k = M(Y_{k-1}), \\ Y_k = \frac{X_k}{\|X_k\|}, \\ r(k) =^{\text{t}} Y_k M Y_k. \end{cases}$$

Exprimer Y_k, pour tout entier naturel k au moyen des a_i et de $\|X_1\| \|X_2\| ... \|X_k\|$.

3. Etudier le comportement de Y_k lorsque k tend vers $+\infty$.

4. Montrer que r_k tend vers λ_1 lorsque k tend vers $+\infty$.

2. Il y a très peu de risque que A, choisi au hasard ne vérifie pas cette condition et les erreurs d'arrondie de tout manière sont ici une chance

VII. LEMME DE SCHUR (pour un public averti)

Notons $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $E = \mathbf{C}^n$. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Pour tout $B \in G$, on note $i(B)$l'application :

$$i(B) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ M \longmapsto BMB^{-1} \end{array} \right.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est **stable** par G si quels que soient $M \in G$, $X \in F$, on a $MX \in F$ et on dit que E est **irréductible** pour G si ses seuls sous-espaces stables par G sont E et $\{0_{\mathbf{E}}\}$.

1. Montrer que $i : B \longmapsto i(B)$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}))$, et que i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'homothéties autres que l'identité.

   On note $\widetilde{G}$ l'image par i de G et $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{A}$ telles que $i(B)(M) = M$ pour tout B dans G.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$. Démontrer que $\ker(M)$ et $\mathrm{im}(M)$ sont des sous-espaces stables par G.

3. On suppose que E est irréductible pour G. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$; démontrer que M est soit nulle, soit inversible. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de dimension 1.

4. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ suivant,

$$\Phi : X \longmapsto MXN$$

   Démontrer que $\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(N)$.

5. Soit $P = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} B$.

   (a) Démontrer que $P^2 = P$. En déduire que P est diagonalisable.

   (b) On note E^G l'ensemble des éléments de $\mathbf{E}$ invariant par tout élément de G :

$$E^G = \{X \in \mathbf{E} | \forall M \in G, MX = X\}.$$

   Démontrer que $\mathrm{Im}(P) = E^G$ et en déduire que $\dim\left(E^G\right) = \frac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{tr} B$.

6. Démontrer que $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^{\widetilde{G}}\right) = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{B \in G} \mathrm{tr}\left(B^{-1}\right) \mathrm{tr}(B)$. On pourra considérer d'abord le cas où i est injectif.

⋆⋆
⋆

Travaux dirigés n° 4

Par $\mathbf{K}$ on désigne le corps des réels ou celui des complexes.

I. NORMES n_p SUR $\mathbf{K}^n$

Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des n-uplet de réels positifs.
Soient p et q des réels *conjugués*, c'est-à-dire tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Montrer que pour tout a et tout b réels positifs,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$

   Cette inégalité trouvera place dans le cours sur les fonctions convexes.

   Pour $k \in \mathbf{R}_+^*$, on considère

$$\phi_k \;:\; \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto \begin{cases} \exp(k\ln(t) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

   cette application est continue et pour tout réel $t \geq 0$, la quantité $\phi_k(t)$ sera noté simplement t^k.

2. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \text{ (inégalité de Hölder).}$$

   Que dire du cas $p = q = 2$?

3. En déduire que pour tout réel p strictement supérieurs à 1,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ (inégalité de Minkowski).}$$

4. Montrer qu'avec les notations du cours, n_p est une norme sur $\mathbf{K}^n$.
5. Montrer que pour tout élément $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{K}^n$,

$$\lim_{p+\infty} n_p(\vec{x}) = n_\infty(\vec{x}).$$

II. NORMES N_p SUR $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{C})$ —

Soient p un réel strictement supérieur à 1, a et b des réels tels que $a < b$;

1. Montrer, qu'avec les notations du cours, N_p est une norme sur $\mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbf{K}\right)$, en utilisant la partie I.3, pour prouver l'inégalité triangulaire.
2. Montrer l'inégalité triangulaire en reproduisant pour l'intégrale le raisonnement fait en I.1, I.2 et I.3.

3. Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbf{K}\right)$,
$$\lim_{p+\infty} N_p(f) = N_\infty(f).$$
4. Soient f et g des éléments de $\mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbf{K}\right)$ et p et q des réels conjugués. Montrer que :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq N_p(f)N_q(g).$$
5. (**5/2**)) Soient ϕ et f des applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On supose ϕ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et f à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose pour tout entier $n \geq 0$, $I_n = \int_{[a,b]} \phi f^n$.
   (a) Montrer que le suite $(\sqrt[n]{I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.
   (b) Montrer que le suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.

II. FONCTIONS HÖLDERIENNES —

Pour tout réel $\alpha > 0$, on notz E_α l'ensemble des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbf{C}$ telles qu'il existe K, réel positif, tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,
$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha.$$
Soit $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$.

1. Montrer que E_α est un espace vectoriel.
2. Soit g un élément de E_α. Montrer que l'ensemble
$$\{k \in \mathbf{R}_+ | \forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|^\alpha.\}$$
admet un plus petit élément noté $k_\alpha(f)$.
3. On supose que $\alpha > 1$. Déterminer $\mathbf{E}_\alpha$.
   Dans la suite $\alpha \in]0,1[$.
4. Vérifier que $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{C}) \subset E_\alpha \subset \mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{C})$.
5. Donner une fonction élément de $\mathbf{E}_\alpha$ qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
6. Soit β un réel tel que $0 < \alpha < \beta < 1$. Comparer E_α et E_β.
7. Montrer que l'application :
$$H_\alpha \ : \ \mathbf{E}_\alpha \to \mathbf{R}_+ \ ; \ f \mapsto \|f\|_\infty + k_\alpha(f)$$
est une norme. On la notera $\|\cdot\|_\alpha$
8. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{E}_\alpha$ telle que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :
$$\forall (p,q) \in [\![n_0, +\infty[\![, \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon. \text{ (suite de Cauchy)}.$$
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément f de $\mathbf{E}_\alpha$ dans $(\mathbf{E}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.

Complément pour $\frac{5}{2}$ averti.

III Autour du Théorème de Baire

1. THÉORÈME DE BAIRE —
   Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie ; on désignera par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} U_n$ est dense.

   Commentaires :

   (a) *Une intersection dénombrable d'ouverts, (qui en général n'est pas ouverte) s'appelle un G_δ. Le théorème dit qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses d'un espace vectoriel de dimension finie est un G_δ dense.*

   (b) *Le théorème de Baire bien que d'énoncé simple admet des conséquences très importantes en analyse. Nous donnerons quelques applications dans la suite*

2. Montre qu'un G_δ dense de $\mathbf{E}$ n'est pas dénombrable.

3. Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés de $\mathbf{E}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \mathbf{E}$. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_n$ est un ouvert dense.

   Indication : On poura montrer que le complémentaire de $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_n$ est d'intérieur vide.

4. — CONTINUITÉ D'UNE DÉRIVÉE —

   (a) Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f, c'est-à-dire que pour tout réel x la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$. Montrons que f est continue sur un G_δ dense.

   i. Soit ε un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier nnaturel n, on pose

   $$F_{n,\varepsilon} := \{\ x \in \mathbf{E} | \forall p \in \mathbf{N}, (p \geq n) \Rightarrow (\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon)\}$$

   et

   $$\Omega_\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}.$$

   Montrer que Ω_ε est un ouvert dense.

   ii. Montrer que tout élément a de Ω_ε, admet un voisinage V tel que pour tout élément x de V, $\|f(x) - f(a)\| \leq 3\varepsilon$.

   iii. Conclure.

   (b) Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable. Montrer que l'ensemble des points de continuité de g contient un G_δ dense.

   Commentaires : Une dérivée est donc « assez » continue. On rapprochera ce résultat du théorème qui dit qu'une dérivée, vérifie le théorème de la valeur intermédiaire, ce qui constitue un premier pas vers la continuité.

5. — CONTINUITÉ ET CONTINUITÉ PARTIELLE — On se propose de montrer le résultat :

   Théorème — *Soit f une application de $[0,1]^2$ dans $\mathbf{R}$. Si en tout point de $[0,1]^2$, f est continue en la première et en la seconde variable, alors il existe un résiduel G de $\mathbf{R}$ tel que f soit continue en tout point de $[0,1] \times G$.*

   Soit un réel ε strictement positif. Pour tout entier naturel n non nul, on note $F_{\varepsilon,n}$ l'ensemble des éléments y de $[0,1]$ tels que, pour tout x et tout x', éléments de $[0,1]^2$ si $|x - x'| \leq \frac{1}{n}$ alors $|f(x,y) - f(x',y)| \leq \varepsilon$:

   $$F_{\varepsilon,n} := \left\{ y \in [0,1] |\ \forall x \in [0,1], \forall x' \in [0,1]^2, |x - x'| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow\ |f(x,y) - f(x',y)| \leq \varepsilon \right\}.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F_{\varepsilon,n}$ est un fermé de $[0,1]$.

(b) Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} F_{\varepsilon,n} = [0,1]$.

(c) Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \overset{\circ}{F}_{\varepsilon,n}$ est un ouvert inclus dans $[0,1]$ dense dans $[0,1]$.
On le notera Ω_ε.

(d) Soient y_0 un élément de Ω_ε et $x_0 \in [0,1]$. Montrer qu'il existe un voisinage W de (x_0, y_0) tel que pour tout $(x,y) \in W \cap [0,1]^2$, $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq 2\varepsilon$.

(e) Posons $G := \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \Omega_{\frac{1}{n}}$. Montrer que l'ensemble G est un résiduel inclus dans $[0,1]$.
Soit (x_1, y_1) un point de $[0,1] \times G$. Montrer la continuité de f en (x_1, y_1). Conclure.

6. Théorème de Banach Steinhauss —

Il s'agit sans doutes d'une des applications les plus spectaculaires de Baire, qui conduit à bon nombre de résultats d'analyse tout à fait remarquables.

Soit $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}})$ un e.v.n., $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$ sera muni de $\|\!|\cdot|\!\|$ norme subordonnée à $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$. Soit A une partie de $\mathcal{L}_c(\mathbf{E},\mathbf{F})$, non vide. Montrer que :

(a) ou bien il existe un réel M tel que pour tout $\vec{\ell} \in A$, $\|\!|\ell|\!\| \leq M$;

(b) ou bien il existe un G_δ dense de $\mathbf{E}$, tel que pour tout élément $\vec{x}$ de ce G_δ,

$$\sup_{\vec{\ell} \in A} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}} = +\infty.$$

En anglais ce théorème porte le nom plus évocateur de *théorème de la « bornaison » uniforme.*

(a) Posons, pour tout élément k de $\mathbf{N}$, $\Omega_k = \{\vec{x} \in \mathbf{E}, \sup_{\vec{\ell} \in A} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}} > k\}$. Montrer que pour tout élément k de $\mathbf{N}$, Ω_k est un ouvert.

(b) Montrer que si, pour tout élément k de $\mathbf{N}$, Ω_k est dense, alors, pour tout élément $\vec{x}$ de $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} \Omega_k$, $\sup_{\vec{\ell} \in A} \|\vec{\ell}(\vec{x})\|_{\mathbf{F}} = +\infty$.

(c) Montrer que s'il existe $k_0 \in \mathbf{N}$, tel que Ω_{k_0} ne soit pas dense, alors il existe un réel M. tel que pour tout $\vec{\ell} \in A$, $\|\!|\ell|\!\| \leq M$.

(d) Conclure.

(e) Soit a une suite réelle telle que pour toute suite réelle b, élément de ℓ^2 la série $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $a \in \ell^2$.

Indication. Considérer l'ensemble $\{L_n, n \in \mathbf{N}\}$ des formes linéaires sur ℓ^2 défini par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, L_n \ : \ \ell^2 \to \mathbf{R}\,;\ b \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

Indications pour la question II.8

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. L'hypothése sur $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nous fournit $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall (p,q) \in [\![n_0, +\infty [\![, \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon. \text{ (suite de Cauchy).} \tag{2}$$

ÉTAPE 1. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement.*

• Soit $x \in [0,1]$. Par (2) , pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$|f_p(x)| \leq \max\{|f_{n_0}(x)| + \varepsilon, |f_0(x)|, ..., |f_{n_0-1}(x)|\}$$

la suite $(f_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$ est donc bornée.

• Soient ℓ et ℓ' des valeurs d'adhérence de $(f_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$. On considère des extractrices ϕ et ψ telles que

$$f_{\phi(p)}(x) \underset{p\to+\infty}{\to} \ell, \text{ et } f_{\psi(p)}(x) \underset{p\to+\infty}{\to} \ell' \ ;$$

quitte à remplacer ϕ par $\phi\circ\psi$, autre extractrice, il est loisible de supposer de surcroît $\phi \geq \psi$. L'inégalité (2) veut que pour tout entier $p \geq n_0$,

$$|f_{\phi(p)}(x) - f_{\psi(p)}(x)| \leq \|f_{\phi(p)} - f_{\psi(p)}\|_\infty \leq \|f_{\phi(p)} - f_{\psi(p)}\|_\alpha \leq \varepsilon,$$

puisque $\phi(p) \geq \psi(p) \geq p \geq n_0$. Laissons tendre p vers $+\infty$, nous obtenons :

$$|\ell - \ell'| \leq \varepsilon.$$

Le caractère arbitraire de ε exige que $\ell = \ell'$.

De ces deux points, et parce que $\mathbf{R}$ est de dimension finie, vient que $(f_p(x))_{p\in\mathbf{N}}$ converge.

D'où la convergence simple de $(f_p)_{p\in\mathbf{N}}$; nous noterons f la limite simple de cette suite.

ÉTAPE 2. L'application f est élément de E_α.

Soient x_1 et x_2 des éléments de $[0,1]$. Pour tout entier $p \geq n_0$

$$\begin{aligned} |f_p(x_1) - f_p(x_2)| \leq & |f_{n_0}(x_1) - f_{n_0}(x_2)| + |(f_p - f_{n_0})(x_1) - (f_p - f_{n_0})(x_2)| \leq \\ & (k_\alpha(f_{n_0}) + k_\alpha(f_p - f_{n_0}))|x_1 - x_2|^\alpha \leq \\ & (k_\alpha(f_{n_0}) + \varepsilon)|x_1 - x_2|^\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

Donc en laissant tendre p vers $+\infty$, on a :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (k_\alpha(f_{n_0}) + \varepsilon)|x_1 - x_2|^\alpha.$$

Donc f est élément de $\mathbf{E}_\alpha$.

ÉTAPE 2. *La suite $(f_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers f dans $(E_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.*

•, pour tout p et tout q entiers tels que $p \geq q \geq n_0$, on a :

$$\forall z \in [0,1], |f_p(z) - f_q(z)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty \leq \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon,$$

et en laissant p tendre vers $+\infty$, pour tout entier $q \geq n_0$ et tout $z \in [0,1]$

$$|f(z) - f_q(z)| \leq \varepsilon,$$

Donc, la borne supérieure étant le plus petit des majorants, pour tout entier $q \geq n_0$.

$$\|f - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

- Par ailleurs pour tout p et tout q entiers tels que $p \geq q \geq n_0$, on a

$$k_\alpha(f_p - f_q) \leq \|f_p - f_q\|_\alpha \leq \varepsilon,$$

et donc

$$|(f_p - f_q)(u) - (f_p - f_q)(v)| \leq \varepsilon |u - v|^\alpha.$$

pour tout u et v éléments de $[0, 1]$. En laissant une nouvelle fois tendre p vers $+\infty$, vient que pour tout entier $q \geq n_0$,

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, |(f - f_q)(u) - (f - f_q)(v)| \leq \varepsilon |u - v|^\alpha.$$

Donc pour tout entier $q \geq n_0$ on a $k_\alpha(f - f_q) \leq \varepsilon$.

De ces deux points, il vient que pour tout entier $q \geq n_0$,

$$\|f - f_q\|_\alpha \leq 2\varepsilon.$$

Donc la suite $(f_q)_{q \in \mathbf{N}}$ converge vers f dans l'e.v.n. $(E_\alpha, \| \cdot \|_\alpha)$.

Travaux dirigés n° 5

Exemples de suites des itérés d'une fonction croissante, rapidité convergence .

I. THÉORÈMES D'ERNESTO CESÀRO

Soit $(\vec{x})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, admettant une limite $\vec{\ell}$. Soit alors la suite $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,

$$\vec{y}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\vec{x}_k,$$

pour tout entier naturel n.
Cette quantité s'interprète comme la moyenne des $n+1$ premiers termes de la suite initiale, du moins lorsque cette dernière est à valeurs dans $\mathbf{R}$, dans le cas général $\vec{y}_n$ en est plus exactement parlant le barycentre, $\mathbf{E}$ étant muni de sa structure canonique d'espace affine. Le théorème de Cesàro affirme que la suite $(\vec{y}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\vec{\ell}$; on a coutume de dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge « en moyenne » ou « au sens de Cesàro » vers $\vec{\ell}$. Ce résultat est conforme à notre intuition. En effet, la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend des valeurs qui tendent à se confondre avec $\vec{\ell}$, lorsque n croît, face aux nombre toujours plus grand de termes entrant dans le calcul de $\vec{y}$, les premiers termes y jouent un rôle de plus en plus négligeable, conférant ainsi à la moyenne une valeur proche de $\vec{\ell}$.

La preuve se calque sur cette démarche heuristique.

1. Prouver ce résultat. Que dire de la réciproque ?
2. Généralisation. Sous les hypothèses du 1. on considère une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels *strictement positifs*, telle que la série $\sum \alpha_n$ diverge, c'est-à-dire telle que :

$$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Soit alors la suite $(\vec{z}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,

$$\vec{z}_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cdot\vec{x}_k,$$

pour tout entier naturel n (moyenne pondérée de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$).
Déterminer la limite de cette dernière suite.

Le théorèle de Cesàro est rentré au programme dans le cas de suites réelles.

II. PREMIER EXEMPLE

Soient a un élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$, K un élément de $]0, 1]$.

1. Montrer que la relation de récurrence suivante définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$u_0 := a,\ u_{n+1} := K\sin u_n,\ \text{pour tout } n \geq 0 \tag{4}$$

2. Montrer que cette suite converge vers 0.

   On se propose maintenant d'étudier la rapidité de convergence de cette suite.

3. Représenter sur un graphique les premiers termes de la suite pour $K = 0.25$, $K = 0.5$ et $K = 1$. Que constater ?

4. Montrer que la quantitée $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est définie pour tout entier naturel n et que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} K.$$

5. Cas de convergence rapide

   On supose dans cette question que $\underline{K < 1}$.

   Pour n grand, d'après la question précédente, la suite se comporte donc à peu près comme une suite géométrique de raison K, d'où pour préciser son comportement l'idée d'étudier la limite de $\sqrt[n]{u_n}$.

   (a) On note pour tout entier naturel n, $w_n := \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite que l'on déterminera.

   (b) En étudiant la suite suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par : $z_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} w_k$, pour tout entier naturel n, déterminer la limite de la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (c) **Réservé aux 5/2**. Donner la forme d'un équivalent du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

6. Cas de convergence lente

   On supose dans cette question que $\underline{K = 1}$.

   (a) Déterminer un réel β tel que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $w_n := u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$, pour tout entier naturel n, admette une limite finie non nulle [3].

   (b) En étudiant la suite suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par : $z_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} w_k$, pour tout entier naturel n, donner un équivalent de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme cn^p où c et p sont des réels.

   (c) **Réservé aux 5/2**. Donner un équivalent simple de $u_n - cn^p$ lorsque n tend vers $+\infty$, (pour les valeurs de c et de p précédemment trouvées).

III. DEUXIEME EXEMPLE.

Soient a un réel strictement positif.

1. Montrer que la relation de récurrence suivante définie bien une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:

$$u_0 := a,\ u_{n+1} := u_n + \frac{1}{u_n},\ \text{pour tout } n \geq 0 \tag{5}$$

2. Déterminer la convergence de cette suite.

3. Donner un équivalent du terme général de cette suite.

IV. DERNIER EXEMPLE

Soit a un élément de $]0, 1[$.

3. L'introduction d'une telle suite, traditionnelle dans les problèmes, semble très artificielle et relever d'une intuision fertile, nous verons dans un prochain chapitre, la source, bien naturelle, d'une telle idée ; pour le moment retenons la recette !

1. Montrer que la formule de récurrence

$$\begin{cases} u_0 := a \\ u_{n+1} := {}^1\!/_2 \left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right), \text{ pour tout entier } n \geq 0, \end{cases} \tag{6}$$

   définie bien une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
2. Déterminer la limite de cette suite.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ a une limite ℓ, indépendante de a, à déterminer.
4. **Réservé aux 5/2**. Donner la forme d'un équivalent du terme général de la suite la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

FIGURE 2 – Ernesto Cesàro 1859-1906

Complément pour $\frac{5}{2}$

V. THÉORÈME DE TAUBER

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence égal à 1. On note S sa somme :

$$S :]-1, 1] \to \mathbf{R};\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose de plus qu'il existe un réel L tel que

$$S(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x<1}}{\to} L.$$

On s'intéresse à la convergence de la série $\sum a_n$.

1. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\sum a_n$ diverge.
2. On suppose jusqu'à la fin que $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to +\infty)$.
   (a) Prouver que pour tout élément x de $]-1, 1[$, et tout entier N supérieur ou égal à 1,
   $$\left|S(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq N(1-x)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} |na_n| + \frac{1}{N(1-x)} \sup_{n>N} |na_n|.$$
   (b) Conclure !

Le résultat demeure en supposant simplement que $a_n = \mathrm{O}(n)$ $(n \to +\infty)$, mais c'est bien plus difficile.

VI. CESÀRERIES

1. **(X.)** On dit qu'une partie A de $\mathbf{N}$ est de densité nulle si
   $$\frac{\mathrm{card}(A \cap \{0, 1, \ldots, n\})}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$
   Soit $(a_n)_{n\in_N}$ une suite de réels positifs, majorée. On note pour tout entier $n \geq 1$,
   $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k.$$
   On se propose de montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
   i. $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$;
   ii. Il existe une partie A de $\mathbf{N}$ de densité nulle telle que $a_n \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\notin A}}{\longrightarrow} 0$
   (a) On suppose **ii.** ; Montrer **i.**
   (b) On suppose **i.** Pour tout $n \in \_N$ on note $\alpha_n := \sup\{S_p, p \geq n\}$. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in^*_N}$ tend vers 0. On considère $A := \{p \in \mathbf{N}^* | a_p \geq \sqrt{\alpha_p}\}$. Montrer que A est de densité nulle, en déduire que **ii.** est vraie.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue. Pour tout réel a, on définit la suite $(v_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ par : $v_0(a) = a$; pour tout $n \in \mathbf{N}, v_{n+1}(a) = f(v_n(a))$. Enfin pour tout entier naturel n on pose : $u_n(a) = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} v_k(a)$.
   (a) On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée. Montrer que f admet un point fixe.
   (b) Trouver un exemple de fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue, ayant un unique point fixe x_f et telle que pour tout réel a distinct de x_f, $(u_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite distincte de x_f.

Travaux dirigés n° 6

Interpolation

I. Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a<b)$ à valeurs réelles, soient enfin $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n+1$ points deux à deux distincts de $[a,b]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, que nous noterons P, qui coïncide avec f en chacun des points x_i :

$$P(x_i) = f(x_i), \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pour $i = 0, 1, 2.., n.$, on pose :

$$L_i := \frac{\prod\limits_{j=0,..,n;\ j\neq i} (X - x_j)}{\prod\limits_{j=0,..,n;\ j\neq i} (x_i - x_j)}$$

Exprimera P au moyen des polynômes $L_0, L_1, \ldots L_n$.

P s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

2. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ Soit x un élément de $[a,b]$ et g l'application :

$$[a,b] \to \mathbb{R};\ t \mapsto (f-P)(t) - A.\frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (t - x_i)}{(n+1)!},$$

où A est un paramètre réel.

(a) Montrer que si x n'est pas élément de l'ensemble $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, il existe une valeur de A pour laquelle $g(x) = 0$. Montrer que pour ce choix de A, il existe un élément y de $[a,b]$ tel que $g^{(n+1)}(y) = 0$.

(b) En déduire qu'il existe un élément y de $[a,b]$ tel que :

$$(f-P)(x) = f^{(n+1)}(y)\ \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (x - x_i)}{(n+1)!},$$

(que x soit ou non élément de $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$).

3. Méthode des trapèzes — Dans cette question f est seulement supposée de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout naturel non nul n, en notant $a_i := a + i\frac{b-a}{n}$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n$, on considère l'application T_n de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, affine par morceaux, continue, qui prend en a_i la valeur $f(a_i)$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n$ et qui est affine sur chacun des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, pour $i = 0, 1, 2, ..., n-1$; on note enfin I_n l'intégrale de T_n sur $[a,b]$:

$$I_n := \int_a^b T_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

(a) Donner l'expression de I_n, pour tout entier naturel non nul n.

(b) En utilisant la question 2., donner une majoration de $|I_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t|$, pour tout entier naturel non nul n, en fonction de n et de $\|f''\|_\infty$.

4. Méthode de Simson — Dans cette question f est supposée de classe $\mathcal{C}^3$. Pour tout entier naturel non nul n, en notant : et $a_i := a + i\frac{b-a}{2n}$, pour $i = 0, 1, 2, ..., 2n$, on définit l'application S_n de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, par

   (a) Pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, T_n coïncide sur $[a_{2k}, a_{2k+2}[$ avec le polynôme P_k d'interpolation de f en $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$, $(\mathrm{d}°(P) \leq 2)$;

   (b) $S_n(a_{2n}) = f(a_{2n})$;

   on note enfin J_n l'intégrale de S_n sur $[a, b]$.

   (a) Donner l'expression de J_n, pour tout entier naturel non nul n.

   (b) Donner une majoration de $|J_n - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t|$, pour tout entier naturel non nul n.

II. Polynômes d'interpolation d'Hermite

Nous avons vu qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n, qui coïncide en $n+1$ points avec une application donnée. Nous allons généraliser en faisant coïncider en certains points non seulement les valeurs du polynôme et de l'application, mais aussi celles de leurs dérivées successives (interpolation d'Hermite).

Soit k un entier naturel. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_k$, $k+1$ points distincts d'un segment $[a, b]$, , et $k+1$ entiers naturels n_0, n_1,…,n_k. Nous noterons n la quantité

$$\sum_{i=0}^{k} (n_i + 1) \ - 1.$$

Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$, admettant pour $i = 0, 1, 2, ...k$, une dérivée d'ordre n_i au point x_i.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q à coefficients réels tel que pour tout élément i de $\{0, 1, \ldots, k\}$ et tout élément ℓ de $\{0, 1, \ldots, n_i\}$,

$$Q^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i).$$

   On prend dans cette question, $k = 1$ et $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $n_1 = n_2 = 1$, donc n=3. Déterminer dans ce cas particulier le polynôme Q.

2. Revenons au cas général, et supposons de surcroît que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit x élément de $[a, b]$, montrer qu'il existe un élément y du plus petit intervalle contenant $x_0, x_1, ..., x_k$ et x, tel que :

$$f(x) - Q(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{k} (x - x_i)^{n_i+1} f^{(n+1)}(y).$$

3. On suppose maintenant que $k = 0$. Déterminer alors Q. Quel résultat connu devient alors le résultat de la question 4. ?

III. Construction des polynômes d'interpolation de Lagrange

On se replace dans le cadre de la première partie, dont on reprend les notations. On cherche à construire numériquement et de sorte assez « économique »le polynôme P qui interpole f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

On note p_k, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, le polynôme qui interpole f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_k$, ainsi $P = p_n$; on désigne par $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ le coefficient de degré k de p_k.

1. (a) Montrer pour $k = 1, \ldots, n$, que

$$p_k - p_{k-1} = f[x_0, x_1, \ldots, x_k](X - x_0)(X - x_1) \ldots (X - x_{k-1}).$$

   (b) Déduire du (a) que :

$$p_n = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](X - x_0)(X - x_1) \ldots (X - x_{k-1}).$$

2. On se propose de donner une méthode algorhitmique de calcul des $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
   (a) Montrer :

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

   (b) Déterminer pour $i = 0, 1, \ldots, k,\ f[x_i]$.
   (c) Donner un algorithme de calcul de p_n, utilisant les résultats (a) et (b), qui fournit

$$f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

IV. Intégration approchée d'une fonction convexe

Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe.
Soit un entier $n \geq 2$. Montrer que :

$$0 \leq \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{8}(f'(n) - f'(0)).$$

V. Régularité des fonctions convexes (réservé à un public averti)

Soit f une application d'un intervalle I d'intérieur non vide à valeurs réelles, convexe.

1. Montrer que f admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point intérieur de I. Comparer la dérivée à droite et celle à gauche en un point intérieur à I.
2. Montrer que f est continue en tout point intérieur à I. Donner un exemple d'application convexes non continue.
3. L'intervalle I est supposé dans cette question ouvert. Montrer que si f est convexe alors elle est continue et admet une dérivée à droite sur I croissante.
4. On suppose que f est continue et admet une dérivée à droite sur I croissante. On se propose de montrer que f est convexe.
   (a) Soit g une application d'un intervalle I non réduit à un point, dérivable à droite et continue. On suppose que g'_d est positif montrer que g croît.
   (b) Soient x_0 un point de l'intérieur de I et T l'application « affine tangente à droite en x_0 » :
   $$T \ : \ I \to \mathbf{R}\,; \ y \mapsto f(y) - f(x_0) - (y - x_0)f'_d(x_0).$$
   Montrer que T est dérivable à droite et continue.
   (c) Montrer, en étudiant le signe de T, que :
   $$\forall y \in I \cap]x_0, +\infty[, f'_d(x_0) \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$
   Montrer que :
   $$\forall y \in I \cap]-\infty, x_0[, f'_d(x_0) \geq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$
   (d) soient x, y, z trois points de I tels que $x < y < z$, montrer que :
   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$
   Conclure.
5. Montrer qu'une fonction localement convexe est convexe.
6. Soient a un point intérieur à I et m un réel. Montrer que la droite D_m de $\mathbf{R}^2$ d'équation :
   $$D_m \ : \ y = f(a) + m(x - a)$$
   est au dessous du graphe de f si et seulement si $f'_g(a) \leq m \leq f'_d(a)$.

Correction de V. 4.

On admet le lemme suivant :

Lemme Soit g une application d'un intervalle I non réduit à un point, dérivable à droite et continue. Si g'_d est positif alors g croît.

Soit x_0 un point de l'intérieur de Iet T l'application « affine tangente à droite en x_0 ».

$$T \ : \ I \to \mathbf{R}\,;\ y \mapsto f(y) - f(x_0) - (y - x_0)f'_d(x_0).$$

L'application hérite de la dérivabilité à droite de f et de sa continuité et $T'_d = f'_d - f'_d(x_0)$. Donc par le lemme et la croissance de f'_d, on a que T croît sur $I \cap]x_0, +\infty[$. Comme T est nulle en x_0, T est positif sur $I \cap]x_0, +\infty[$ et donc :

$$\forall y \in I \cap]x_0, +\infty[, f'_d(x_0) \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

De même

$$\forall y \in I \cap]-\infty, x_0[, f'_d(x_0) \geq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

Donc si x, y, z sont trois points de I tels que $x < y < z$, on a alors :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

La convexité en résulte. Redonons la preuve semblable à celle du cours qui dit que si la fonction pente croît, alors la fonction est convexe. Soit y et z des points de I tels que $x < z$. Soit $t \in]0, 1[$ On pose

$$y_t = tx + (1 - t)z.$$

Par le cours de 4[e] sur les barycentres du siècle passé : $t = \frac{z - y_t}{z - x}$ et $(1 - t) = \frac{y_t - x}{z - x}$. Par ailleurs, la propriété des pentes que l'on vient de prouver donne :

$$\frac{f(y_t) - f(x)}{y_t - x} \leq \frac{f(z) - f(y_t)}{z - y_t}.$$

ce qui s'écrit :

$$\left(\frac{z - x}{(y_t - x)(z - y_t)}\right) f(y_t) \leq \frac{f(x)}{y_t - x} + \frac{f(z)}{z - y_t}$$

Donc, par positivité de $(y_t - x)(z - y_t)$ et $z - x$, on a :

$$f(tx + (1 - t)z) = f(y_t) \leq \frac{z - y_t}{z - x} f(x) + (1 - t) + \frac{y_t - x}{z - x} f(z) = tf(x) + (1 - t)f(z).$$

Voilà prouvée la convexité de f.

Preuve du lemme Soient a et b des points de I tels que $a < b$. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}^*_+$. Posons $E_\varepsilon := \{t \in [a, b] | g(t) \geq g(a) - \varepsilon(t - a)\}$ [4]

Comme $a \in E_\varepsilon$ et que b majore cet ensemble, E_ε admet une borne supérieure inférieure ou égale à b, que nous baptiserons c. La continuité de g veut que E_ε soit fermé et donc que $c \in E_\varepsilon$.

En fait $c = b$. supposons le contraire Comme $g'_d(c) \geq 0$ Il existe un $h > 0$ tel que pour tout $t \in]c, c + h] \cap I$,

$$\frac{g(t) - g(c)}{t - c} \geq -\varepsilon,$$

4. L'objectif est de montrer que $b \in E_\varepsilon$, la définition de la dérivée à droite comme limite d'un taux d'accroissement montre que E_ε contient un voisinage à droite de a.

quitte à diminuer h supposons $c+h \leq b$. On a alors,

$$g(c) - g(a) \geq -\varepsilon(c-a),$$

$$g(c+h) - g(c) \geq -\varepsilon(h),$$

par sommes de ces inégalités :

$$g(c+h) - g(a) \geq \varepsilon(c+h-a)$$

ce qui fait de $c+h$ un point de E_ε, contredisant la définition de c.

Donc $c = b$ et on a $g(b) \geq g(a) - \varepsilon(b-a)$. Comme ε est quelconque :

$$g(b) \geq g(a).$$

Voilà prouvée la croissance de g.

Travaux dirigés n° 7

Compacité

On utilisera le résultat suivant que nous allons voir en cours :
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute partie fermée bornée est compacte.

I UN THEOREME DU POINT FIXE COMPACT

Soit K un compact d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|.\|)$ et $\vec{f}$ une aplication de K dans K vérifiant pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$, éléments distincts de K :

$$\left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\right\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|. \tag{7}$$

1. Montrer que $\vec{f}$ admet un unique point fixe.
   INDICATION : Pour l'existence, étudier l'application $g : K \to \mathbf{R}$, $\vec{x} \mapsto \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{x}\right\|$.
2. Soit $\vec{c}$ un point quelconque de K. On définit la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par
$$\begin{cases} \vec{x}_0 = c \\ \vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n) \ \ n \geq 0 \end{cases}.$$
   Pour tout entier naturel n on pose $d_n = \left\|\vec{f}(\vec{x}_n) - \vec{x}_n\right\|$. Montrer que la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, nous noterons ℓ sa limite.
3. Montrer qu'il existe une sous suite $\left(\vec{x}_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ de la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un élément $\vec{a}$ de K, et montrer que $\left\|\vec{f}(\vec{a}) - \vec{a}\right\| = \vec{\ell}$
4. En considérant la suite $\left(d_{\varphi(n)+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que $\vec{\ell} = 0$.
5. Montrer que la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe de $\vec{f}$.
6. Déduire de ce qui précède une méthode numérique pour résoudre l'équation :
$$\tan x - x = k.$$
7. Donner un exemple d'application $\vec{f}$ vérifiant (7), mais pour laquelle il n'existe pas de réel k , élément de $]0, 1[$, tel que $\vec{f}$ soit k-contractante.
8. Montrer que si K est seulement fermé, (mais pas compact) alors $\vec{f}$ n'a pas nécessairement de point fixe.
9. Nous supposons maintenant que K est un compact étoilé de $\mathbf{R}^p$ où p est un entier strictement positif, et que $\vec{g}$ est une aplication de K dans K vérifiant pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$, éléments de K :
$$\|g(x) - g(y)\| \leq \|x - y\|. \tag{8}$$
   Montrer que $\vec{g}$ admet au moins un point fixe. L'application $\vec{g}$ peut-elle admettre plusieurs points fixes ?
10. Prenons une feuille de papier non perforée, posons la sur une table et dessinons sur la table le rectangle correspondant au pourtour de la feuille. Puis froissons sauvagement la feuille et reposons la dans le rectangle de sorte que chacun des points de la feuille ainsi froissée se projette orthogonalement dans le rectange. Montrer qu'un des points de la feuille au moins se projette orthogonalement sur sa position initiale. Le résultat demeure-t-il pour une feuille perforée ?

II THÉORÈME DU POINT FIXE DE PICARD

Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soient k un élément de $[0,1[$, et $\vec{f}$ une application de F dans F, k-contractante.

On se propose de montrer que $\vec{f}$ admet un et un seul point fixe.

1. Montrer que $\vec{f}$ admet au plus un point fixe.
2. Soit $\vec{a}$ un élément de F. On considère la suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des itérés de $\vec{a}$ par f, c'est-à-dire $(\vec{f}^n(\vec{a}))_{n\in\mathbf{N}}$.
   (a) Montrer que pour tout p et tout q entierss tels que $p > q$,
   $$\|\vec{x}_p - \vec{x}_q\| \leq \frac{k^q}{1-k}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\|.$$
   (b) Montrer que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
   (c) Montrer que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément $\vec{\ell}$ de F.
   (d) Conclure.
3. (5/2) On se propose de passer par un autre biais. Montrer que,la série $\sum \vec{x}_{n+1} - \vec{x_n}$ est absolument convergente. Conclure.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $\|\vec{f}^n(\vec{a}) - \vec{\ell}\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|\vec{f}(\vec{a}) - \vec{a}\|$.

III DISTANCE À UN COMPACT

On admet le résultat que nous allons prochainement voir en cours : *Toute partie fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte.*

1. Le cas général : Soient A une partie non vide, compacte d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|.\|)$ et $\vec{c}$ un élément de $\mathbf{E}$. Montrer qu'il existe au moins un élément $\vec{a}$ de A tel que :
   $$\mathrm{d}\,(\vec{c}, A) = \|\vec{a} - \vec{c}\|.$$
2. Montrer que le résultat demeure si A est seulement un fermé non vide et $\mathbf{E}$ de dimension finie.
3. Application : On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme euclidienne canonique (norme de Frobenius). Montre que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de déterminant 1, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$), qui est fermé. Est-il compact ? Montrer qu'il existe un élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ de norme minimale. *À suivre...*
4. Montrer que le résultat demeure si l'on remplace A, par un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$, de dimension finie, ($\mathbf{E}$ étant de dimension quelconque).
5. Un cas particulier : Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbf{R})$ qui contient les applications polynomiales, muni d'une norme notée $\|.\|$. Pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des applications polynomiales de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à n.
   a. Montrer que pour toute application f élément de $\mathbf{E}$, il existe au moins un élément p_n de $\mathcal{P}_n$ tel que :
   $$\mathrm{d}\,(f, \mathcal{P}_n) = \|f - p_n\|.$$
   Nous appellerons p_n, « *polynôme de meilleure approximation de f de degré n* ».
   b. Prenons pour $\mathbf{E}$, l'ensemble des applications f de $[-1, 1]$ dans $\mathbf{R}$, continues par morceaux, qui vérifient :
      i. pour tout élément x de $]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$,

ii. $f(1) = f(1^-)$, $f(-1) = f(-1^+)$.

Vérifier que $\mathbf{E}$ est bien un espace vectoriel. Montrer que l'application

$$N_1 : \mathbf{E} \to \mathbf{R},\ f \mapsto \int_{-1}^{1} |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

est bien une norme sur $\mathbf{E}$.

c. - Soit f l'élément de $\mathbf{E}$, défini par :

$$f(x) = -1,\ \text{pour } x < 1,$$

$$f(x) = +1,\ \text{pour } x > 1.$$

Déterminer tous les polynômes de meilleure approximation de degré 0 de f.

Compléments pour public averti...

IV THÉORÈME DE HEINE

1. Soient K et K' des compacts non vides d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que l'ensemble $\{\|\vec{x}-\vec{y}\|, (\vec{x},\vec{y}) \in K \times K'\}$ admet une borne inférieure que, dans la suite on notera $\mathrm{d}(K, K')$ (distance de K à K').
2. Montrer qu'il existe un élément $\vec{x}_0$ de K et un élément $\vec{y}_0$ de K' tels que : $\mathrm{d}(K, K') = \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\|$.
3. Soit $\vec{f}$ une application d'un compact D de $\mathbf{E}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathbf{F}, \|\cdot\|)$, continue. Soit ε un réel strictement positif, On note $H_\varepsilon := \{(x,y) \in D^2, \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \geq \varepsilon\}$ et $\Delta := \{(x,x), x \in D\}$. Montrer que H_ε et Δ sont des compacts disjoints.
4. En déduire le théorème de Heine.

V UNE CARACTÉRISATION DES COMPACTS

Soit $(E; \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que toute série à valeur dans $\mathbf{E}$ absolument convergente soit convergente [5].

Nous allons donné une caractérisation « géométrique » des compacts

Adoptons la définition suivante :

DÉFINITION. *Une partie A de $\mathbf{E}$ est dite* plate *si pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$, de dimension finie, tel que $A \subset \mathbf{F}_\varepsilon$, où $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{F} + \mathrm{B_f}(0_\mathbf{E}, \varepsilon)$, ($\varepsilon$-grossissement de F) .*

Nous allons prouver :

PROPOSITION. *Soit une partie A de $\mathbf{E}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) L'ensemble K est un compact.

(ii) L'ensemble K est fermé, borné et plat.

On désigne dans la suite par A une partie de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.

1. PRÉCOMPACITÉ.

   (a) On suppose dans cette question la partie A compacte. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des boules fermées de rayon ε, en nombre fini, $B'_1, B'_2, \ldots B'_p$ telles que $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} B'_i$. On dit que A peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon ε.

   (b) *application* Montrer que tout compact K de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. possède une partie dense dénombrable.

   (c) On suppose que pour tout réel $\varepsilon > 0$ la partie A peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon ε [6].

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A.

   Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbf{N}^*}$ d'applications φ_m de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ strictement croissantes telle que pour tout entier $m \geq 1$, la suite $(x_{\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_m(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ soit à valeurs dans une boule fermée de rayon $\frac{1}{2^m}$.

   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une suite extraite $(x_{\psi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ convergente.

   (d) Montrer que $\bar{A}$ adhérence de A est compacte si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, la partie A peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon ε.

5. De tels espaces vectoriels normés sont dits de Banach ou complet.
6. On traduit cette propriété en disant que A est précompacte.

2. On suppose la partie A compacte. Montrer que A est fermée bornée plate.
3. On suppose A fermée, bornée et plate.
   Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.
   (a) Montrer que sans perte de généralité, on peut supposer que $K \subset \mathrm{B_f}(0_{\mathbf{E}}, 1)$
   Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.
   (b) Par hypothèse de platitude on dispose de $\mathbf{F}$ sous-espace vectoriel de dimension finie tel que $\mathbf{F}_\varepsilon$ contienne K. On note $\mathrm{B}_{\mathrm{f},\mathbf{F}}$ la boule unité fermée de $\mathbf{F}$.
   Montrer qu'il existe d'un entier $N_\varepsilon \in \mathbf{N}^*$ et de $(y_1, \ldots, y_{N_\varepsilon}) \in F^{N_\varepsilon}$ tels que :
$$\mathrm{B}_{\mathrm{f},\mathbf{F}} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} \mathrm{B}_{\mathrm{f},F}(y_i, \varepsilon).$$
   (c) On suppose que ε est inférieur à 1. Déduire de la précédente sous-question, que A est recouvert par N_ε boules fermées de rayon 3ε.
   (d) En déduire que A est compact.

VI COMPACTS ET RECOUVREMENT PAR DES OUVERTS (X, ENS)

Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n. Nous nous proposons de montrer qu'une partie K de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$est compact, si et seulement si pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts telle que $K \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i$, il existe une partie *finie* J de I telle que $A \subset \underset{i\in J}{\cup} O_i$. On traduit cette dernière propriété en disant que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

1. On suppose que K est un compact de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$; il existe un recouvrement fini de K par des boules ouvertes de rayon ε.
   Indication : Raisonner par l'absurde.
   (b) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts telle que $K \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $\mathrm{B_0}(x, \varepsilon) \cap K \subset O_i$.
   Indication : Raisonner par l'absurde.
   (c) Montrer que de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.
2. Montrer que si de de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini, alors K est compact [7].
3. Montrer que K est compact si et seulement si pour toute famille de fermés de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, $(F_i)_{i\in I}$ telle que $K \cap \left(\underset{i\in I}{\cap} F_i\right) = \emptyset$, il existe une sous-famille *finie* $(F_i)_{i\in J}$ telle que :
$$K \cap \left(\underset{i\in J}{\cap} F_i\right) = \emptyset.$$

7. C'est cette propriété, qui dans le cas de topologies ne dérivant pas d'une distance, sert à définir un compact.

Travaux dirigés n° 8

Connexité par arcs, convexité

I. CONVEXES

Certaines questions font l'objet du DM 3, et ne sont là que pour mémoire.

Soit C un convexe non vide fermé de $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. le produit scalaire canonique est noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ la norme associée.

On appelle hyperplan d'appui de C en un point a de C tout hyperplan $\mathbf{H}$ de $\mathbf{R}^n$ passant par a tel que C soit inclus dans un des demi-espaces fermés définis par $\mathbf{H}$. Un point a de C est dit extrémal si $C - \{a\}$ est convexe, autrement dit si a n'est pas le milieu de deux points distincts de C.

1. Enveloppe convexe. Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$ non vide.

   L'enveloppe convexe d'une partie, comme les sous-espace vectoriels ou sous-groupes engendrés par une partie, peut se définir de deux manières :
   — *par intersection ;*
   — *au moyen d'opérations sur les éléments de la partie.*

   (a) Montrer que l'intersection d'une famille non vide de convexes est convexe. En déduire qu'il existe un plus petit convexe contenant A. On l'appelle enveloppe convexe de A, on notera $\operatorname{conv}(A)$.

   (b) Montrer que $\operatorname{conv}(A)$ est l'ensemble $\mathcal{B}_+(A)$ des barycentres d'un nombre quelconque d'éléments de A affectés de coefficients positifs quelconques.

   Soit p un point de $\operatorname{conv}(A)$ barycentre à coefficients positif de d points $a_1, ..., a_d$, affectés des coefficients respectifs $(\alpha_1, ..., \alpha_d)$. On suppose que $d \geq n+2$.

   (c) Montrer que le noyau de l'application linéaire suivante est non trivial

   $$\Phi \;:\; \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}\,;\; (x_1, ..., x_d) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{d} x_i a_i, \sum_{i=1}^{d} x_i\right)$$

   En considérant un élément $(z_1, ...z_d)$ du noyau de L non nul et les applications

   $$\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto \alpha_i + t z_i,$$

   pour $i = 1, 2, ...d$, montrer que p est barycentre à coefficients positifs de $d-1$ points de A.

   (d) Théorème de Carayhéodory —

   Montrer que $\operatorname{conv}(A)$ est l'ensemble des barycentres de $n+1$ éléments de A affectés de coefficients positifs quelconques.

   (e) On suppose que la partie A est compacte. Montrer que son enveloppe convexe, $\operatorname{conv}(A)$, est aussi compacte.

   (f) L'enveloppe convexe d'un fermé est-elle fermée.

2. Projection sur un convexe

(a) Soit z un élément de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un et un seul point c de C tel que : $\|z - c\| = \mathrm{d}(c, C)$. Le point c s'appelle projection de z sur C et sera noté $p(z)$. On dispose ainsi d'une application p de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans C.

(b) Soit y un élément de C, montrer que $\langle y - p(z) | z - p(z)\rangle \leq 0$.

Indication : Considérer un point du segment $[p(\vec{a}), \vec{y}]$.

Quelle interprétation géométrique donner de ce résultat ?

(c) Soient a et b des éléments de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\|p(a) - p(b)\| \leq \|a - b\|$. Que dire de l'application p ?

3. On suppose que z n'apartient pas à C. Montrer que C admet en $p(z)$ un hyperplan d'appui

4. Montrer que $p(\mathbf{R}^n - C) \subset \mathrm{Fr}(C)$

5. Soit f un point de la frontière de C. Montrer que C admet en f un hyperplan d'appui. *Indication* : Considérer une suite d'éléments de $\mathbf{R}^n \setminus C$ qui converge vers f.

6. Théorème de Krein-Milman

   On suppose dans cette question que C est *compact*.

   (a) Soit $\mathbf{H}$ un hyperplan d'appui de C en un point a. Montrer que a est un point extrémal de C si et seulement si il est un point extrémal de $C \cap \mathbf{H}$ (on justifiera que $C \cap \mathbf{H}$ est un convexe fermé.

   (b) Montrer que tout point y de C est barycentre à coefficients positifs de points de la frontière de C.

   Indication : On pourra considérer l'intersection de C et d'une droite passant par y.

   (c) Montrer que C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Théorème de Krein-Milman).

7. On ne suppose plus C compact mais au contraire, non borné. Montrer que C contient une demi droite.

8. Soient X un convexe de $\mathbf{R}^n$ non vide, a un point intérieur à X et b un point adhérent à X. Montrer que $[a, b[$ est inclus dans l'intérieur de X.

   Indication : Etudier pour un point x de $[a, b[$ l'image d'une boule de centre a par une homothétie de centre x.

9. Égalité des accroissements finis vectorielle

   (a) Rappeler l'égalité des accroissements finis pour une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Montrer que si l'on remplace dans l'énoncé l'ensemble d'arrivé $\mathbf{R}$ par $\mathbf{R}^2$, alors le résultat est faux.

   Donnons un généralisation à $\mathbf{R}^n$ de l'égalité des accroissements finie.

   Soit F une application d'une application d'un intervalle ouvert I non vide à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

   Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. Le sous-espace affine engendré par A est le plus petit sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$ contenant A, c'est aussi l'ensemble des barycentres de points de A.

   Théorème 1. *Supposons F dérivable et soient a et b des élément de I tels que $a < b$. Notons d la dimension de l'espace affine engendré par $F([a, b])$. Alors il existe c_1, c_2,...,c_{d+1} des éléments de $]a, b[$, λ_1, λ_2,...,λ_{d+1} des réels positifs ou nuls de somme 1, tels que*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i F(c_i).$$

Ce théorème est assez délicat, nous allons en donner une forme faible : nous supposerons F de classe $\mathcal{C}^1$ et nous contenterons pour les c_i de l'apppartenance à $[a,b]$.

(b) Montrer que l'on ne restreint pas la généralité en supposoant que $0_{\mathbf{R}^n}$ est élément de $F([a,b])$ et que dans ce cas le sous-espace affine engendré par $F([a,b])$ est le sous-espace vectoriel engendré par $F([a,b])$.

(c) Montrer que $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ est limite d'une suite de barycentres à coefficients positifs d'éléments de $F'([a,b])$.

(d) Conclure.

II. CONNEXITÉ PAR ARCS

Soient un entier $n \geq 2$ et une application f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ continue.

1. On suppose qu'il existe un réel a tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f atteint en $f^{-1}(\{a\})$ son maximum ou son minimum.
2. On supose qu'il existe un réel b tel que $f^{-1}(\{b\})$ soit compact. Montrer que f atteint son maximum ou son minimum.

III . RECOUVREMENT D'UN COMPACT (pour un public averti)

L'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soit K un compact de $\mathbf{R}^2$.

1. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un ensemble finie P de K tel que K soit recouvert par les boules ouvertes de rayon ε centrées sur les points de P : $K \subset \bigcup_{p\in P} \mathrm{B}_0(p,\varepsilon)$.
2. Montrer que K possède une partie dense dénombrable.
3. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on dit qu'une partie A de K est ε-séparée si la distance entre deux points distincts de A est supérieure ou égale à ε.
   (a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un entier $M(\varepsilon)$ tel que toute partie ε-séparée soit de cardinal inférieur ou égal à $M(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie ε-séparée de cardinal $M(\varepsilon)$.
   (b) Dans le cas paticulier où la norme choisie est la norme euclidienne canonique et où K est inclus dans la boule fermée de centre l'origine et de rayon $R > 0$ donner un majorant de $M(\varepsilon)$
   (c) Soit f une application de K dans K qui conserve la distance. Montrer que f est surjective.
4. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Soit F une partie de K, *finie*. On dit que F recouvre K à ε près si :

$$K \subset \bigcup_{a\in F} \mathrm{B_f}(a,\varepsilon).$$

   (a) Montrer qu'il existe un entier $m(\varepsilon)$ tel que toute partie qui recouvre K à ε près soit de cardinal supérieur ou égal à $m(\varepsilon)$ et tel qu'il existe une partie qui recouvrent K à ε près de cardinal $m(\varepsilon)$.
   (b) Notons $\mathcal{P}$, l'ensemble des parties qui recouvrent K à ε près de cardinal $m(\varepsilon)$. Montrer que l'application

$$\mathcal{P} \to \mathbf{R}\,;\ P \mapsto \sum_{(x,y)\in\mathcal{P}^2} \|x-y\|$$

   atteint sa borne inférieure.

Travaux dirigés n° 9

Annulé pour cause de 11 novembre.

---

0. Préambule

Montrer l'existence et donner la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\mathrm{d}x$$

Indication : on pourra introduire la quantité $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)\mathrm{d}x$ que l'on comparera à I.

I. Calculs d'intégrales

1. Soit f une application continue par morceaux, qui admet une limite ℓ en $+\infty$ et une limite ℓ' en $-\infty$. Montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale suivante.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+1) - f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale suivante.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{artan}(3t) - \operatorname{artan}(2t)}{t}\mathrm{d}t.$$

3. Soit x un réel strictement positif. Montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale suivante.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt) - \exp(-t)}{t}\mathrm{d}t.$$

II. Développements asymptotiques d'intégrales

1. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ à déterminer, telle que pour tout élément k de $\mathbf{N}^*$,

$$\int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{a_1 x}{\ln x} + \frac{a_2 x}{(\ln x)^2} + \cdots + \frac{a_k x}{(\ln x)^k} + \mathrm{o}\left(\frac{x}{(\ln x)^k}\right),\ x \to +\infty.$$

2. Montrer qu'il existe une suite de réels $(b_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ à déterminer, telle que pour tout élément k de $\mathbf{N}^*$,

$$\int_x^{+\infty} \exp(-t^2)\mathrm{d}t = \exp(-x^2)\left(\frac{b_0}{x} + \frac{b_1}{x^3} + ... + \frac{b_k}{x^{2k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{2k+1}}\right)\right),\ x \to +\infty.$$

III. Moyenne pondérée le retour de Cesàro

1. Soit f un élément de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. On se propose d'étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout entier naturel n,

$$I_n = n\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$$

   (a) Représenter pour diverse valeurs de n les applications $[0,1]\to\mathbb{R}\,;\, t\to \frac{t^n}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}\,t}$.

   (b) Montrer que :

$$\frac{1}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}\,t}\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}\,t \underset{n\to+\infty}{\to} f(1)\,.$$

   En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer.

2. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, continue et bornée.

   (a) Pour tout entier naturel n, justifier l'existence de :

$$J_n = n\int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\mathrm{d}t.$$

   On se propose d'étudier la limite éventuelle de la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (b) Représenter pour diverses valeurs de n les applications $\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}\,;\, t\to \frac{e^{-nt}}{\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}\,t}$.

   (c) Montrer, en raisonnant comme précédemment que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer.

   (d) (**Réservé** $\frac{5}{2}$.) Reprendre la sous question précédente par changement de variable et en utilisant le théorème de convergnce dominée.

IV. Lemme de Lebesgue

1. Soit g une application d'un segment non trivial $[a,b]$ à valeur réelles de classe $\mathcal{C}^1$ Déterminer la limite en $+\infty$ de de l'application

$$\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\ \lambda\mapsto\int_{[a,b]} g\sin(n\,\cdot).$$

2. On ademet le lemme de Lebesgue (question 1) en ne supposant g seulement continue (voir cours.)

   Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ intégrable de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout réel λ, montrer l'existence de

$$L(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda t)\mathrm{d}t.$$

   Déterminer la limite de $L(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

3.

4. Soit f un élément de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$. Montrer pour tout entier naturel n, l'existence de

$$I_n = \int_0^1 \frac{f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t}{t}.$$

   Etudier la limite éventuelle lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

5. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On admet (jusqu'à un prochain TD) que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

(b) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbf{R})$. Montrer pour tout entier naturel n, l'existence de

$$I_n = \int_0^1 \frac{f(t)\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t.$$

Étudier la limite éventuelle lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

(c) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$J_n := \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)}\mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence de cette intégrale.

(d) Étudier la limite éventuelle de la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Indication : On pourra utiliser une intégration par parties.

Complément de programme.

Soit $T \in \mathbf{R}_+^*$.

Soit h une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, T-périodique. On pose :

$$< h >= \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout réel x et tout entier n,

$$\frac{1}{nT}\int_x^{x+nT} h(t)\mathrm{d}t =< h > .$$

2. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ non réduit à un point. Montrer

$$\int_a^b f(t)h(nt)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < h > \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

3. Reprendre l'exercice avec f seulement continue par morceaux.

Une intégrale célèbre —

On se propose de calculer l'intégrale suivante, qui intervient notamment dans le calcul d'un champ éléctrostatique créé par une densité invariante rotation autour d'un arc et par translation dans la direction de cette axe :

$$\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que pour tout réel x, la quantité $\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$ est bien définie.

   Nous allons donner la valeur de cette intégrale.

   Dans la suite on désigne par f l'application

$$f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}\,;\ x\mapsto \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

2. *Première méthode*

   (a) (5/2) Montrer que l'application f est continue. Les 3/2 admettront ce résultat.

   (b) pour tout réel x distinct de 1 et de -1, calculer $f(x)$ en utilisant les sommes de Riemann.

   (c) Conclure.

3. *Seconde méthode*

   (a) Pour tout réel x étudier $f(-x)$, $f(x^2)$ et pour x de plus non nul $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (b) En déduire f.

Normes d'application linéaire

Travaux dirigés n° 10

I. PREMIER EXEMPLE

Soit L l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$, noté en colonne, dans lui-même définie par,

$$L(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X,$$

pour tout élément X de $\mathbf{R}^2$.

1. Montrer que L est continue de $(\mathbf{R}^2, n_2)$ dans lui-même et donner sa norme.
2. Généraliser en substituant à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ unélément quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$quelconque.

II. ÉTUDE DE NORME SUR $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on note x_i le terme de la i^{e} ligne de X, pour $1 \leq i \leq n$.

1. Soit l'application

$$N \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}_+ \ ; A \mapsto \max_{j=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

   est une norme. On a vu en DS. que, de même,

$$N' \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}_+, \ ; A \mapsto \max_{i=1,\ldots,n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

   est une norme.

2. Montrer que N et N' sont des normes subordonnées à des normes sur $\mathcal{M}_{,,n}(1)\mathbf{C}$ à préciser, lorsque l'on identifie les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ canoniquement associés.
3. Montrer que

$$N_F \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}_+, \ ; A \mapsto (\mathrm{tr}(M^\top M))^{\frac{1}{2}}$$

   est une norme.

   On l'appelle *norme de Frobenius.*
4. Montrer que N_F est une norme d'algèbre (on dit aussi matricielle).
5. La norme N_F est elle une norme subordonnée.

III. ÉTUDE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Par $\mathbf{E}$ sera désigner l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, continue.
Soient g un élément de $\mathbf{E}$ et L la forme linéaire

$$\mathbf{E} \to \mathbf{R} \, ; f \mapsto \int_{[0,1]} gf.$$

1. On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_2 et $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$. Montrer que L est continue et déterminer sa norme d'opérateur.
2. On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_1 et $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$.
   (a) Montrer que L est continue.
   (b) Montrer que $|g|$ atteint sa borne supérieure en un point a de $[0,1]$.
   (c) Dans le cas où $a \in]0,1[$, déterminer la norme d'opérateur de L.
   (d) Conclure dans le cas général.
   (e) On considère la restriction L_1 de L à l'espace vectoriel $\mathbf{E}_1$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On prend pour g l'application $\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\cdot\right)$. Montrer que L_1 est continue et déterminer sa norme d'opérateur lorsque E_1 est muni de la restriction de N_∞ et $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$.
3. On munit $\mathbf{E}$ de la norme N_∞ et $\mathbf{R}$ de $|\cdot|$. Montrer que L est continue et déterminer sa norme d'opérateur.

IV. ÉTUDE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

1. Soit f une application linéaire sur $(\mathbf{R}^3, n_1)$ dans un espace vectoriel normé $(\mathbf{F}, \|\cdot\|)$. On note B la boule unité fermé de $(\mathbf{R}^3, n_1)$.
   (a) Montrer que B est l'intersection de 8 demi-espaces fermés de chacun desquels ont on donnera une équation. Représenter B.
   (b) Soient $P_1, P_2, \ldots, P_8$ les 8 plans affines délimitant ses demi-espaces. Les points de B. qui appartiennent à 3 de ces plans, distincts, sont appelés sommets de B. Déterminer les sommets de B.
   (c) On appelle face de B, les ensembles $P_i \cap B$, $i = 1, 2 \ldots, 8$. Combien il y a t-il de sommets par faces ?
2. Montrer qu'il existe un sommet s de B tel que $|\!|\!|\vec{f}|\!|\!| = \|\vec{f}(\vec{s})\|_{\mathbf{F}}$.
3. *Application* : déterminer $|\!|\!|\vec{f}|\!|\!|$, pour $(\mathbf{F}, \|\cdot\|_{\mathbf{F}}) = (\mathbf{R}^2, n_2)$ et $\vec{f}$ définie par :
$$f\,(x,y,z) = (8x + 5y + 4z, 2x - 3y),$$
   pour tout triplet de réels (x, y, z).
4. Soit ℓ une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $(\mathbf{F}, \|\cdot\|)$. On munit $\mathbf{R}^n$ d'une norme N. Avec les notrations du TD 8 montrer qu'il existe un point x extrémal de la boule unité fermée de $(\mathbf{R}^n, N)$ tel que : $|\!|\!|\vec{\ell}|\!|\!| = N(\ell(x))$.

V. ÉQUIVALENCE DE NORMES.

Notons $\mathbf{E} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$. Soient un réel $C > 0$ et $\mathbf{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbf{E}$ tel que :
$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2, \tag{9}$$
pour tout élément f de $\mathbf{F}$.

1. Montrer que les restrictions de $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ à $\mathbf{F}$ sont équivalentes.
2. Montrer que $\mathbf{F}$ est de dimension finie inférieure ou égale à C^2.
3. Donner un exemple de sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$ de dimension n et vérifiant (9) avec $C = n^{\frac{1}{2}}$.

Travaux dirigés n° 10

I. ÉQUIVALENTS DE RESTES ET DE SOMMES PARTIELLES DE SÉRIES

Nous avons vu comment déterminer au moyen des théorèmes de sommation d'équivalents, des restes et des sommes partielles de séries à termes positifs. Nous allons aller plus loin !

1. Étude de restes

   (a) Soit un réel $a > 1$. Donner un équivalent lorque n tend vers $+\infty$, de
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^a}.$$

   (b) Donner un développement limité à l'ordre 3 en « $\frac{1}{n}$ », de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

2. Étude d'une somme partielle, constante d'Euler

   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

   Posons pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$, $x_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel γ, appelé *constante d'Euler*.

   (b) Montrer que
   $$x_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), (n \to +\infty).$$

II. SUITES ITÉRÉES : TOUJOURS PLUS LOIN !

Nous allons reprendre un exercice déjà étudié, avec des outils plus puissants, le généraliser, et mieux comprendre le sens de la méthode précédemment empoyée.

Soit a un élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$. Nous avons montré que la relation de récurrence
$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = \sin(u_n), \end{cases}$$
définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et montré que cette suite converge vers 0.

1. Nous avons montré que la suite : $\left(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite non nulle .
   D'ou vient l'idée de considérer cette quantité ?
2. En utilisant les théorèmes de sommation des relations de comparaisons pour des séries à termes positifs, donner lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de u_n, de la forme cn^γ, avec c et γ réels.
3. pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on pose $a_n := u_n - cn^\gamma$. Donner un équivalent de a_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

III. POUR ÊTRE SÛR D'AVOIR COMPRIS

1. (a) Montrer que la relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 5, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}, \end{cases}$$

définit bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

(b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet $+\infty$ comme limite

(c) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

(d) Montrer que $u_{1000} \in [45, 45,1]$.

2. (a) Montrer que la relation de récurrence

$$\begin{cases} v_0 = a, \\ v_{n+1} = u_n + \exp(-v_n), \end{cases}$$

définit bien une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet $+\infty$ comme limite

(b) Donner un développement asymptotique de v_n à deux termes, lorsque n tend vers $+\infty$.

3. (a) Soit b un élément de $]1, +\infty[$. Montrer que la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ x_{n+1} = x_n + \ln(x_n), \end{cases}$$

définit bien une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que cette suite converge vers $+\infty$.

(b) Donner un équivalent simple de $\ln(x_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$, puis de x_n.

4. Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n \sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2 = 1$. Déterminer un équivalent de c_n lorsque n tend vers $+\infty$.

IV. TRANSFORMATION DE NIELS HENRIK ABEL

La méthode suivante de sommation, qui est l'analogue discret de l'intégration par parties, est hors programme mais doit se retrouver rapidement.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites réelles. Posons pour tout entier naturel n, $u_n = a_n b_n$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1. On pose $B_n := \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$, pour tout entier naturel n. Montrer pour tout n et tout p entiers naturels que :

$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} (a_{n+k} - a_{n+k+1}) B_{n+k} + [a_{n+p+1} B_{n+p} - a_{n+1} B_n]$$

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers zéro en décroissant. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $k \in \mathbf{N}$ si $n \geq n_0$, alors :

$$|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon,$$

(suite de Cauchy).

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

4. Montrer que la série converge.
5. Déduire de ce qui précède le théorème spécial des séries alternées.
6. Soient t un réel et α un réel strictement positif. Etudiers les séries

$$\sum_{n\geq 1}\frac{e^{int}}{n^\alpha}\ ;\ \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nt)}{n^\alpha}\ ;\ \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nt)}{n^\alpha}$$

7. Soit $\sum v_n$ une série de réels convergente. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=0}^{n} kv_k = \mathrm{o}(n).$$

8. Soit $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de réels strictements positifs qui tend vers $+\infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum \dfrac{x_n}{w_n}$ converge de somme L.

   Montrer que $\frac{1}{w_n}\sum\limits_{k=0}^{n} x_n$ tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.

   Indication : Considérer la quantité $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{x_n}{w_n}$.

V. RECHERCHE D'ÉQUIVALENT

Soient a un réel > 0 et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels définie par rcurrence par : $x_1 = a$ et pour tout $n\in\mathbf{N}$, en désignant par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$,

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{S_n}.$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer un équivalent de x_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

VI. SUITE DÉFINIE IMPLICITEMENT

Montrer qu'il existe une et une seule suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n\in\mathbf{N}$

$$u_n^5 + nu_n - 1 = 0. \tag{10}$$

Donner un développement asymptotique à deux terme de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

VII. CALCUL DE SOMMES

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On pourra évaluer pour commencer $\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t$.
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout $n\in\mathbf{N}$, $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n}\frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln(n))^2$ converge.

   (b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}.$$

Travaux dirigés n° 12

I. CAS DOUTEUX DANS LA RÈGLE DE D'ALEMBERT

Soit une série à termes strictement positifs, $\sum u_n$, à laquelle on peut associer deux réels a et b, avec $b > 1$ tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^b}\right) \ (n \to \infty)$$

1. Montrer que si $a < 0$, alors la série diverge grossièrement.
2. Montrer en utilisant la comparaison indirecte (cf. exercice du cours) à la série harmonique que si $a < 1$, alors la série diverge.

   Exemple : étudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!}\prod_{p=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right).$$

3. Dans le cas général montrer le résultat hors programme suivant :
   Il existe un réel k strictement positif tel que

$$u_n \sim \frac{k}{n^a} \ (n \to \infty).$$

   Indication : On poura étudier la série téléscopique $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

4. Application donner la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{2.4.6...............(2n-2).2n}{1.3.5........(2n-1).(2n+1)}.$$

5. Nous souhaitons établir la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n} \ (n \to \infty)$
   (a) Posons pour tout entier naturel n, $u_n := n!n^{-n}.e^n$, montrer qu'il existe un réel k tel que $u_n \sim k\sqrt{n}$.
   (b) Posons, pour tout entier naturel n, $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$.
   Calculer pour tout entier naturel p, I_{2p} et I_{2p+1}.
   (c) Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

   (d) En déduire que $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ tend vers une limite que l'on déterminera, lorsque n tend vers $+\infty$.
   (e) Déduire de la question précédente la valeur de k et conclure.

II. ÉCRITURE DÉCIMALE D'UN RÉEL

Quitte à retrancher à x sa partie entière, pour allèger l'écriture nous supposeros que $x \in [0, 1[$.

Rappelons qu'un nombre décimal d, c'est-à-dire un réel de la forme $\frac{a}{10^N}$ où a est un élément de $\mathbf{Z}$ et N de $\mathbf{N}$ peut se mettre sous la forme :

$$x = \pm a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + ...a_N 10^N.,$$

où $a_0, a_1 a..., a_N$ sont des entiers naturels. On note alors $x = \pm a_0, a_1 a_2 ... a_N$ cette dernière forme est appelée écriture décimale de x, l'entiers naturel a_i la i^{e} décimale de x, pour $i = 1, ..., N$.

Nous nous proposons de fournir à tout réel x une écriture similaire. Quitte à retrancher à x sa partie entière, pour allèger l'écriture, nous supposeros que $x \in [0, 1[$.

Soit x un élément de $[0, 1[$. On définit les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$x_n := 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor\,,\ ,y_n := x_n + 10^{-n} \text{ et } a_n := \lfloor 10^n x\rfloor - 10\left\lfloor 10^{n-1}x\right\rfloor).$$

1. Un exemple
   On prend pour x le réel $0,123456$, c'est-à-dire, on le rappelera dans la suite, le réel $\sum_{i=1}^{6} i10^{-i}$. Déterminer pour ce choix de x les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
2. Écriture décimale

   (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $x_n \leq x < y_n$.
   On appelle x_n (resp. y_n) valeur approchée de x par défaut (resp. par excès) à 10^{-n} près.

   (b) Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes. Quelle est leur limite ?

   (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
   $$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i 10^{-i}.$$
   Le réel x est donc la somme de la série $\sum_{n\geq 1} a_n 10^{-n}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ s'appelle la suite des décimales de x.
3. Étude de la suite des décimales de x
   On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ d'éléments de $\{0, 1, \ldots, 9\}$, qui ne sont pas constamment égales à 9 à partir d'un certain rang, c'est-à-dire, que pour tout élément N de $\mathbf{N}^*$, il existe un entier n tel que $n \geq N$ et $a_n \neq 9$.

   (a) Montrer que pour tout élément x de $[0, 1[$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de ses décimales est élément de $\mathcal{S}$.

   (b) Montrer que l'application δ qui à un élément x de $[0, 1[$ associe la suite de ses décimales est une bijection de $[0, 1[$ sur $\mathcal{S}$.

   Le caractère bijectif de δ autorise à noter un élément de $[0, 1[$, $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n \ldots$, où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ désigne la suite de ses décimales. On dit qu'un élément x de $[0, 1]$ est décimal, si par définition, la suite de ses décimales est nulle à partir d'un certain rang. Si $\delta(x)$ est nulle à partir du rang n_0, on notera simplement $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_{n_0-1}$.
4. Caractérisation des rationnels

   (a) Montrer que le nombre $0,777777777\ldots$ (la suite des décimales est constante égale à 7) est rationnel.
   Même question pour les nombres $0,17891789\ldots 1789\ldots$ et $0,12345292629\ldots 29\ldots$.

   (b) Soit x un élément de $[0, 1[$, on suppose que la suite de ses décimales $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il existe des entiers n_0 et p strictement positifs tels que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, $a_{n+p} = a_n$. L'entier p est appelée période de la suite. Montrer que x est rationnel.

(c) Montrer, réciproquement que pour tout élément x de $[0,1[$ rationnel, $\delta(x)$ est périodique à partir d'un certain rang.

5. Montrer que l'ensemble $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

III. Nombres de Liouville

Compléments pour public averti

On dit qu'un nombre réel est algébrique si, par définition, il est la racine d'un polynôme à coefficients entiers. Par exemple 29 ou $\sqrt{2}$ sont algébriques. Nous étudierons un peu en exercice les nombres algébriques dans un chapitre suivant. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit transcendant, c'est par exemple le cas de π ou e. Nous allons montrer qu'il existe beaucoup de nombres transcendants.

Soit x un réel.

1. On suppose que x est racine du polynôme à coefficients entiers de degré $m \geq 1$,

$$P = a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m$$

.

Soit M le plus grand des nombre réels $\left|\frac{a_j}{a_0}\right|$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Montrer que toute racine de P à un module strictement inférieur à $1 + M$.

2. On suppose toujours x racine de P. Soit $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ une valeur rationnelle approchée de x à $\frac{1}{q}$ près, qui n'est pas une racine rationnelle de P.

(a) Montrer qu'il existe un réel α vérifiant $|\alpha| \leq M + 2$ tel que :

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q} - x\right) P'(\alpha).$$

(b) En déduire l'existencence d'un entier $K \geq 0$ qui ne dépend que des coefficients de P tel que :

$$\frac{1}{q^m} \leq \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right| K.$$

3. Soit un entier naturel $m' \geq 1$. On suppose que l'ensemble des entiers $q' \geq 1$ tels qu'il existe $p' \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$\left|x - \frac{p'}{q'}\right| \leq \frac{1}{q'^{m'+1}},$$

est infini. Montrer que x n'est pas racine d'un polynôme à coefficient entiers de degré m'.

4. Nombres de Liouville

Soit le réel donné par son écriture décimale

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n!},$$

où $(a_n)_{n \in N^*}$ est une suite à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ qui n'est pas à partir d'un certain rang constante à 0. Un tel nombre réel est dit *nombre de Liouville.*

(a) En étudiant la valeur approchée par défaut de α à $\frac{1}{10^{m!}}$ près, pour m entier naturel, montrer que α est transcendant.

(b) Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est en bijection avec $]0,1[$.

Il y a « beaucoup » de nombres de Liouville et plus encore de nombres transcendants !

IV. Fractions continues

Soit α un réel. On définit la procédure suivante.

```
                         Procédure P
```

- `“Etape 0”`
  $i = 0$; $x := \alpha$; $a := E(x)$;
- `“Etape` i`”`
  `tant que` $x - a \neq 0$ `faire :`
  $i = i + 1$; $x = \frac{1}{x-a}$; $a = E(x)$;
  `fin (de boucle “tant que”).`

```
                      Fin de procédure
```

En notant x_i et a_i les valeurs respectives de x et a fournies par la i^{e} étape de la procédure, on dispose donc, soit de suites $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$, soit de suites finies $(x_0, \dots, x_n)$ et $(a_0, \dots, a_n)$, selon que la procédure ne se termine pas ou se termine à l'étape n.

1. Soit n un élément de $\mathbf{N}^*$. On suppose que la procédure s'est déroulée jusqu'à l'étape n. Vérifier que :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{x_1},\ \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}, \dots,\ \alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots \frac{1}{x_n}}}},$$

2. Exemples
   Déterminer les suites (finies ou non) $(a_i)_{i\geq 0}$, pour $\alpha = \frac{225}{141}$ et $\alpha = \sqrt{2}$.
3. Cas rationnel
   (a) Montrer que si la procédure se termine, alors α est rationnel.
   (b) On suppose que α est rationnel. Il existe donc (p, q) éléments de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$) tels que $\alpha = \frac{p}{q}$ et p et q premiers entre eux. Donner une procédure calculant les termes de la suites $(a_i)_{i\geq 0}$, à partir de p et q. montrer que cette procédure se termine. De quel algorithme s'agit-il en fait ?
   (c) Conclure que la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ est finie si et seulement si α est rationnel.
4. Cas irrationnel
   On Suppose dans la suite que α n'est pas rationnel. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$ on note R_n le rationnel :

$$R_n := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots \frac{1}{a_n}}}},$$

   On dit que R_n est la (fraction continue) réduite d'ordre n de α. On se propose de montrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers α.

   On définit les suites d'entiers $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$\begin{array}{lll} P_0 = a_0, & Q_0 = 1, & \\ P_1 = a_0 a_1 + 1, & Q_1 = u_1, & \\ P_n = P_{n-1}a_n + P_{n-2} & Q_n = Q_{n-1}a_n + Q_{n-2}, & \text{pour tout } n \geq 2. \end{array}$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $R_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n \tag{11}$$

(c) Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{P_n}{Q_n}$ est une fraction irréductible.

(d) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\alpha = \frac{P_n x_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n x_{n+1} + Q_{n-1}}. \tag{12}$$

En déduire que

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right|.$$

(e) Conclure.

(f) Montrer que

$$\alpha = \frac{P_0}{Q_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n+1}}.$$

Discuter suivant les valeurs de n si la réduite d'ordre n est une approximation par excés ou par défaut de α.

5. Montrer que si la suite $(a_i)_{i \geq 0}$ est périodique à partir d'un certain rang, alors α est racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers.

   Indication : On pourra commencer par le cas où $(a_i)_{i \geq 0}$ est périodique.

V. Irrationnalité de π

On suppose que π est rationnel. Il existe donc $(a,b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ tel que $\pi = \frac{a}{b}$. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on considère le polynôme : $p_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, les dérivées successives de p_n prennent des valeurs entières en 0 et en π.
2. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on pose $I_n := \int_0^\pi p_n(t) \sin t dt$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.
3. Montrer que pour tout élément n de $\mathbf{N}$, I_n est un entier.
4. Conclure à l'irrationnalité de π.

Travaux dirigés n° 13

I . RÉGULARITÉ D'APPLICATIONS

1– Soit F l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$

$$F \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2}, \text{ pour } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \text{ pour } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^0$.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Est-ce que F est de classe $\mathcal{C}^2$?

2– Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit F l'application :

$$F \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{g\,(x) - g\,(y)}{x-y}, \text{ pour } x \neq y, \\ g'\,(x)\,, \text{ pour } x = y. \end{cases}$$

a) Montrer que F est continue.
b) Montrer que si g est deux fois dérivable en un point a de $\mathbf{R}$, alors F est différentiable en (a,a).

II. RÉGULARITÉ DE QUELQUES NORMES

Soient n un entier naturel non nul. On considère les applications suivantes de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$:

$$\mathrm{N}_\infty \ : \ (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \sup_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|\,,$$

$$\mathrm{N}_2 \ : \ (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{N}_1 \ : \ (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

1– Montrer que les applications N_∞, N_2 et N_1 sont continues.
2– Pour $n = 2$ représenter les graphes de ces trois applications.
À partir de là on pourra se limiter à $n = 2$.
3– En quel point de $\mathbf{R}^n$ chacune de ces applications admet-elle des dérivées partielles d'ordre 1, par rapport aux n variables. On pourra commencer par le cas $n = 2$.
4– Déterminer le plus grand ouvert U, tel que la restriction de N_2 à U soit de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer la différentielle de N_2 en un élément $\vec{a}$ de U. Exprimer pour $\vec{h}$ élément de $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{dN}_2(\vec{a}) \cdot \vec{h}$ grâce au produit scalaire canonique de $\vec{a}$ par H.
5– Déterminer le plus grand ouvert U tel que la restriction de N_1 à U soit de classe $\mathcal{C}^1$. Même question pour N_∞.
6– Soit N une norme sur un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. Montrer que N n'est pas différentiable en $\vec{0}_{\mathbf{E}}$.

IV. INJECTIVITÉ LOCALE (5/2)

Soientt U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et , f une application de U dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et a un point de U tel que la différentielle en a soit un isomorphisme. Démontrer qu'il existe un voisinage V de a tel que la restriction de fà V soit injective.

IV. DIFFERENTIABILITÉ D'UNE DISTANCE (5/2)

Soit d une distance sur un espace vectoriel de dimension finie $\mathbf{E}$ et Ω un ouvert de $\mathbf{E}$.
On se propose d'étudier la différentiabilité de

$$\delta\,;\ \Omega^2 \to \mathbf{R}\,;\ (m,n) \mapsto d(m,n).$$

On suppose que δ est différentiable sur Ω^2 et l'on considère (m_0, n_0) un point de Ω^2

1. Que vaut $\mathrm{d}\delta(m_0, m_0)$?
2. En déduire que pour tout vecteur $\vec{h}$ de $\mathbf{E}$, $\mathrm{D}_{(\vec{h},0_{\mathbf{E}})}\delta(m_0,n_0) = 0$.
3. En déduire que δ est non différentiable sur Ω^2.

V. DIFFERENTIABILITÉ DE LA DISTANCE À UN FERMÉ

(réservé à un publique averti)

Soient n un entier naturel non nul et $\mathbf{F}$ un fermé de $\mathbf{R}^n$ non vide. On notera Ω le complémentaire de $\mathbf{F}$. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonoique et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer que l'application distance à F,
$$\delta\ :\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\,;\ m \mapsto d(m,F)$$
est continue.
2. Montrer que pour tout point m de Ω, il existe au moins un élément f de F tel que $\|f-m\| = d(m,F)$.

   Dans la suite, pour tout élément m de Ω on note $A(m) := \{f \in F | \|f-m\| = d(m,F)\}$. Et on se propose d'étudier la différentiabilité de l'application
$$\phi\ :\ \Omega\,;\ m \mapsto d(m,F)^2$$
3. Montrer que ϕ est différentiable en un point m de Ω si et seulement si $\delta_{|\Omega}$ l'est.
4. Supposons que ϕ soit différentiable en un point m_0 de Ω. Soit f un point de $A(m_0)$. Montrer que $\vec{\nabla}\phi(m_0) = 2(m_0 - f)$.
5. En déduire une condition nécessaire sur $A(m)$ pour que ϕ soit différentiable en un point m de Ω.
6. Soit m_0 un point de Ω. On suppose que $A(m_0)$ est un singleton : $A(m_0) = \{f_0\}$.
   (a) On se propose de montrer que $d(f_0, A(m_0+\vec{h})) \underset{\vec{h}\to\vec{0}_{\mathbf{E}}}{\to} 0$.

      Supposons que $d(f_0, A(m_0+\vec{h}))$ ne tende pas vers 0.

      i. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ et une suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{E}$ qui tend vers m_0 tel que $d(f_0, A(p_n)) \geq \delta$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
      ii. On note $G = \{y \in F | \|f_0 - y\| \geq \delta\}$. Montrer que $\phi(p_n) = d(p_n, G)^2$.
      iii. En déduire que $\phi(p_n)$ ne tend pas vers $\phi(m_0)$, lorsque n tend vers $+\infty$.
      iv. conclure.

   (b) On se propose d'en déduire que ϕ est différentiable en m_0.

i. Montrer que pour tout vecteur $\vec{h}$ de $\mathbf{E}$ tel que $m_0+\vec{h}$ soit dans Ω, et tout élément f_h de $A(m_0+\vec{h})$

$$\phi(m_0+\vec{h}) \geq \phi(m_0) + 2\langle m_0 - f_h|\vec{h}\rangle + \|\vec{h}\|^2.$$

ii. Montrer que pour tout vecteur $\vec{h}$ de $\mathbf{E}$ tel que $m_0+\vec{h}$ soit dans Ω,

$$\phi(m_0+\vec{h}) \leq \phi(m_0) + 2\langle m_0 - f|\vec{h}\rangle + \|\vec{h}\|^2.$$

iii. Conclure

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit différentiable en un point m de Ω.

Travaux dirigés n° 13

ÉQUATION DE RÉFÉRENCE.

L'équation aux dérivées partielles la plus simple est $\partial_1 f = 0$. Par ailleurs, on résoud le plus souvent les équations plus complexes en se ramenant à cette équation. Toutefois en dépit de son apparente simplicité, la résolution d'une telle équation est loin d'être triviale. En particulier, il est faut se garder de croire, que les solutions sont toujours les applications « qui ne dépendent pas de x », comme on l'entend souvent. En fait tout dépend du domaine sur lequel on résout l'équation, comme le montre le présent exercice.

1– Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. montrer que $\partial_1 f = 0_{\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}}$, si et seulement si, il existe une application g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout (x, y), élément de $\mathbf{R}^2$,

$$f(x, y) = h(y).$$

2- Posons $U = \mathbf{R}^2 - \{(0, y), y \in \mathbf{R}_+\}$; et soit f l'application,

$$f \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \, ; \ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, \ \text{pour } y < 0, \\ 0, \ \text{pour } y \geq 0 \text{ et } x < 0, \\ y^3 \ \text{pour } y \geq 0 \text{ et } x > 0. \end{cases}$$

Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\partial_1 f$ est nulle.

Ainsi f est-elle une application de classe $\mathcal{C}^1$, qui dépend de x, en effet $f(-1, 1) \neq f(1, 1)$, et telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

2– Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathbf{C}^1$, telle que $\partial_1 f$ soit nulle. f peut-elle dépendre ou non de x dans les cas suivants :

a) U est le disque ouvert unité : $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$.

b) $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 - y^2 < 1\}$.

c) $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y^2 - x^2 < 1\}$.

II . ÉQUATONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

On s'intéresse aux équations aux dérivées partielles de la forme,

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \ a_i \in \mathbf{R}, \ \textit{pour } i = 1, \ldots p.$$

dire que f est solution revient à dire que $\mathrm{D}_{\vec{v}} = 0$, où $\vec{v}$ désigne le vecteur $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$. Considérons alors une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^p$, dont le premier vecteur est $\vec{v}$. Si $\tilde{f}$ est « l'expression de f » dans les coordonnées $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, la condition $\mathrm{D}_{\vec{v}} f = 0$, devient naturellement, comme le montrera un calcul élémentaire $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1} = 0$. On est rammené à résoudre une équation du type étudier dans le paragraphe précédent. Exemple :

1– On se propose de déterminer l'ensemble S des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2$,

$$2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

a) Posons $\vec{v} = (2,3)$ et $\vec{w} = (0,1)$ [8], de sorte que $(\vec{v}, \vec{w})$ soit une base de de $\mathbf{R}^2$, notée $\mathcal{B}'$. Soit L l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ qui à tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$ associe le couple (u_1, u_2) de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$. L est un isomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$. Expliciter L et L^{-1}.

b) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, on note $\tilde{f}$ l'application,

$$\tilde{f} \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\,;\; (u_1, u_2) \mapsto f(L^{-1}(u_1, u_2)),$$

autrement dit, $\tilde{f} = f \circ L^{-1}$. Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$.
Soit

$$\mathcal{I} \;:\; \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})\,;\; f \mapsto f \circ L^{-1}.$$

Montrer que $\mathcal{I}$ est un isomorphisme dont on précisera l'isomorphisme réciproque $\mathcal{J}$.

c) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, on note $\tilde{f}$ l'application, $f \circ L^{-1}$. Calculer, pour tout élément (u_1, u_2) de $\mathbf{R}^2$, $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u_1}(u_1, u_2)$ en fonction des dérivées partielles de f au point $L^{-1}(u_1, u_2)$. En déduire que $\mathcal{I}$ induit une bijection de S sur l'ensemble $\tilde{S}$ des éléments g de $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, tels que, pour tout élément (u_1, u_2) de $\mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial u_1}(u_1, u_2) = 0.$$

d) En déduire S.

2–Déterminer l'ensemble S' des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$,

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + y.$$

3–Déterminer l'ensemble S'' des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$,

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f.$$

8. On aurait pu prendre tout autre vecteur non colinéaire à $\vec{v}$.

4–Déterminer l'ensemble S' des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y,z) de $\mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0.$$

4–UN EXEMPLE D'ORDRE 2 : L'ÉQUATION D'ONDE

Soit α un réel strictement positif. On se propose de déterminer l'ensemble S_2 des éléments f de $C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

a) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, et d tels que pour tout application f élément de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$,

$$\mathrm{D}_{(a,b)}\left(\mathrm{D}_{(c,d)}f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

b) Déterminer l'ensemble S_1 des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tels que, $\mathrm{D}_{(a,b)}f = 0$.

c) Déterminer l'ensemble S_2.

III . ÉQUATONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES À COEFFICIENTS NON CONSTANTS

On se propose de déterminer l'ensemble S des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Autrement dit on cherches les applications f telles qu'en tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, la dérvée de f selon le vecteur $(y,-x)$, $\mathrm{D}_{(y,-x)}f(x,y)$ soit nulle. On intuite donc, que, pour que f soit solution, il faut et ilsuffit qu'elle soit constante sur les orbites du champ $\vec{v}\,:\,(x,y) \mapsto (y,-x)$ (lignes de champ) ; en effet la nulité de la dérivée selon le champ $\vec{v}$, c'est-à-dire tangentiellement aux lignes de champ traduit naturellement la constance le long de cette ligne. Or Les orbites du champ sont les solutions du système

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$$

ce sont donc des cercles de centre $(0,0)$ (le champ $\vec{v}$ est orthoradial!). Ceci nous invite donc à « passer en polaire ». On s'attend, d'après ce que nous avons dit, à ce que les éléments de S soient des fonctions constantes sur ces cercles, c'est-à-dire, dont l'expression en polaires ne dépend pas de θ. On va donc s'employer à étudier la dérivation « en θ ».

1– Désignons par U, l'ensemble $\mathbf{R}^2$ privé de $\{(x,0), x \in \mathbf{R}_-\}$, partie négative de l'axe des x. On note S_U l'ensemble des éléments f de $C^1(U, \mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de U,

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

a) Déterminer un ouvert Ω de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, produit de deux intervalles I et J $(\Omega = I \times J)$, tel que $\Omega \to \mathbf{R}^2$; $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ induise une bijection p de Ω sur U.
Montrer que p et sa bijection réciproque sont $\mathcal{C}^1$.

b) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$. Posons $\tilde{f} = f \circ p$. Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbf{R})$.
Soit

$$\mathcal{I}\,:\,\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbf{R})\,;\; f \mapsto f \circ p.$$

Montrer que $\mathcal{I}$ est un isomorphisme.

c) Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, on note $\tilde{f}$ l'application, $f\circ p$. Calculer, pour tout élément (r,θ) de Ω, $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$, en fonction des dérivées partielles de f au point $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. En déduire que $\mathcal{I}$ induit une bijection de S_U sur l'ensemble $\tilde{S}_U$ des éléments g de $C^1(\Omega,\mathbf{R})$, tels que, pour tout élément (r,θ) de Ω,

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)=0.$$

d)Déterminer $\tilde{S}_U$. En déduire S_U.

3– Déterminer l'ensemble S.

4– Déterminer l'ensemble S' des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2-\{(0,0)\},\mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$,

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+y^2.$$

5- Déterminer l'ensemble, noté S'_U des éléments f de $C^1(U,\mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de U,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

6- Déterminer l'ensemble, noté S'_U des éléments f de $C^1(U,\mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de U,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f.$$

7- Déterminer l'ensemble S' des éléments f de $C^1(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ tels que, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$,

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$$

IV . FONCTIONS HARMONIQUES

Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ à valeur réelles, de classe $\mathcal{C}^2$. On dit que f est *harmonique*, si, par définition, $\Delta f = 0$.

1– Soit n un élément de $\mathbf{N}^*$. Déterminer toute les applications de $\mathbf{R}^n - \{(0,0,\dots,0\}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ harmoniques et radiales. Un application est dite *radiale*, si sa valeur en un point m ne dépend que de la distance de m à $(0,0,\dots,0)$.

2– (5/2) Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ à valeur réelles, de classe $\mathcal{C}^2$, harmonique. Soit (a,b) un point de $\mathbf{R}^2$. Pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$. On note $M(R)$, la « valeur moyenne »de f sur le disque fermé de centre (a,b) et de rayon R, noté D_R, c'est-à-dire :

$$M(R) = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right) r\mathrm{d}r.$$

et l'on note $m(R)$, la « valeur moyenne » de f sur le cercle de centre (a,b) et de rayon R, noté C_R, c'est-à-dire :

$$m(R) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} f(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta)R\mathrm{d}\theta.$$

a) Montrer que l'application $m\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ R \mapsto m(R)$ est dérivable. Préciser sa dérivée.

b) Montrer que l'application $g\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ R \mapsto Rm'(R)$ est dérivable. Montrer que sa dérivée est nulle.

<u>indication</u> : On utilisera l'expression en polaire du laplacien.

c) Déduire de ce qui précède, que pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$,

$$m(R) = f(a,b).$$

d) Montrer que pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$, $M(R) = f(a,b)$.

3—

Soit B la boule ouverte de $\mathbf{R}^n$ de centre $(0,0,...0)$ et de rayon strictement positif R. Soit f une fonction continue sur $\bar{B}$ nulle sur la sphère $S((0,...,0),R)$ à valeurs réelles et dont la restriction à B est de classe $\mathcal{C}^2$.

a) Montrer que si f admet en un point a de B un maximum local alors $\Delta f(a) \leq 0$.

b) Montrer que si f s'annule en un point c de B alors Δf s'annule en un point b de B.

c) Montrer que si $\Delta f < 0$ sur B, alors $f > 0$ sur B.

1. Montrer que si $\Delta f \leq 0$ sur B, alors $f \geq 0$ sur B.
   Indication : utiliser $f_0\ :\ \bar{B} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto R^2 - \|x\|^2$.
2. Montrer qu'il existe au plus une application g continue sur $\bar{B}$ nulle sur la sphère $S((0,...,0),R)$ à valeurs réelles et dont la restriction à B est de classe $\mathcal{C}^2$, qui soit harmonique et qui coïncide sur $S((0,...,0),R)$ avec une application continue donnée.

4— Soit D une partie de $\mathbf{R}^2$ fermée, bornée et convexe. Soit f une application qui est la restrictions à D d'une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U contenant D, à valeurs réelles, on dira, pour faire court, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Soit $\mathbf{E}$ le sous-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur D nulles sur la frontière de D, à valeurs réelles (on ne demande pas de vérifier, fait trivial, qu'il s'agit d'un espace vectoriel). Soit f un élément de $\mathbf{E}$ tel que $\Delta f = \lambda f$. On suppose que $\lambda > 0$.

a) On suppose que f atteint sa borne supérieure en un point (x_0, y_0) intérieur à D. Montrer que f est l'application nulle sur D.

b) Que dire si f atteint sa borne inférieure en un point (x_0, y_0) intérieur à D.

c) En déduire que f est nulle.

L'existence de vecteurs propres pour f associés à des valeurs propres strictement négatives est un problème délicat mais crucial dans les sciences.

Travaux dirigés n° 14

Moyennes pondérées d'applications, densité des polynômes ou le retour de Cesàro

I. Convolution par des noyaux, théorème de Weierstrass

Pour tout entier $n \geq 1$ on définit :

$$P_n \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto a_n(1-x^2)^n,$$

où $a_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n \mathrm{d}x}$.

1. Calculer a_n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Tracer l'allure du graphe de la restriction de P_n à $[0,1]$, pour quelques valeurs de n...
2. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on note $K_\alpha = [-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1]$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$\sup_{x \in K_\alpha} |P_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\to} 0,$$

On justifiera au préalable l'existence de ces bornes supérieures.

3. Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, continue et telle que $f(0) = f(1) = 0$. On prolonge cette application en une application $\tilde{f}$ à $[-1,2]$ en posant $\tilde{f}(x) = 0$, pour tout $x \in [-1,2] \setminus [0,1]$. et on défini pour tout entier $n \geq 1$, et tout $x \in [0,1]$,

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \tilde{f}(x+t)P_n(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ polynomiales.
   (b) Montrer que $\|Q_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.
   (c) Démontrer le théorème de Weierstrass.

II. Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

On se propose de donner une preuve constructive du théorème de Weiserstrass, d'inspiration probabiliste, due à Bernstein, qui date du tout début de XX$^{\text{e}}$. siècle.

1. Montrer que l'on ne restreint pas la généralité en prenant $a = 0$ et $b = 1$. Ce qui sera fait dans la suite.

   On considère f une application de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère le polynôme :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k},$$

   n^{e} polynôme de Bernstein associé à f.

2. Soient x un élément de $[0,1]$, n un entier naturel et Y une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathbf{P})$ qui suit une loi binomiale de paramètre (n,x) : $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $\mathbf{P}(Y = k)$ est maximum pour $k = \lfloor (n+1)x \rfloor$

   On considère dans la suite un élément x de $[0,1]$ et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes, toutes de même paramètre x. Notons pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

3. Donner pour tout entier $n \geq 1$, l'espérance de la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, au moyen des polynômes de Bernstein associés à f. Donner sa valeur dans le cas particulier où f est l'identité.
4. Donner la variance de $\frac{S_n}{n}$.
5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \mathbf{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right).$$

6. Pour tout réel $h > 0$, on pose :

$$\omega(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|, (x_1, x_2) \in [0,1]^2 \text{ et } |x_1 - x_2| \leq h\},$$

$$A_h = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq h\right\}.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $h > 0$,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\mathbf{P}(\bar{A}_h)\|f\|_\infty + \mathbf{P}(A_h)\omega(h)$$

7. Soit η un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbf{P}\left(\bar{A}_\eta\right) \leq \frac{1}{4n\eta^2}.$$

On peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

8. Conclure.

III. Théorème de Weierstrass trigonométrique

le théorème de Weierstrass trigonométrique n'est pas au programme. Il donne facilement le théorème de Weierstrass, hélas ce dernier est imuissant à nous livrer le théorème trigonométrique.

Soit $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles ou complexes. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$, définie par , pour tout élément f de $\mathbf{E}$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ constitué des fonctions polynômiales.

Soit $\mathbf{F}$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes. On le munit de la norme encore notée $\|.\|_\infty$, définie par, pour tout élément g de $\mathbf{F}$, $\|g\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |g(t)|$.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{T}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{F}$ engendré par les fonctions $e_k\ :\ t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, où les nombres entiers k vérifient $-n \leq k \leq n$.

Soit φ_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\varphi_n(t) = a_n\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2n}$, le réel a_n étant tel que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

1. (a) Montrer que φ_n est un élément de $\mathbf{T}_n$.
   (b) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 u \geq 1 - \sin u$. En déduire que, pour tout entier n, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1}\ \mathrm{d}u \geq \frac{1}{n+1}$, puis que $a_n \leq \frac{n+1}{4}$.
   (c) Soit δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{\delta\leq t\leq\pi} \varphi_n(t) = 0$.

2. Soit g un élément de $\mathbf{F}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note Q_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) g(u-t) \, \mathrm{d}t.$$

   (a) Établir la relation :

   $$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u-t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

   En déduire que Q_n appartient à $\mathbf{T}_n$.

   (b) Soit toujours δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer l'inégalité :

   $$|g(u) - Q_n(u)| \leq \sup_{|t| \leq \delta} |g(u) - g(u-t)| + 4\pi \|g\|_\infty \sup_{\delta \leq t \leq \pi} \varphi_n(t).$$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|g - Q_n\|_\infty = 0$.

   (d) On suppose que g est une fonction paire ; montrer que Q_n est une fonction paire et en déduire qu'il existe un élément P_n de $\mathcal{P}$, de degré au plus égal à n, tel que $Q_n(u) = P_n(\cos u)$.

3. (a) Soit f un élément de E. Prouver qu'il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$. On prolongera f en une fonction paire, notée $\widetilde{f}$, et on introduira $g(u) = \widetilde{f}(\cos u)$.

   En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans E relativement à la norme uniforme $\|.\|_\infty$.

   (b) Montrer que, pour tout élément f de E, on a l'inégalité $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$. En déduire que $\mathcal{P}$ est également dense dans E relativement à la norme $\|.\|_2$.

Travaux dirigés n° 15

I. Groupe cyclique

Soit G un groupe cyclique à n éléments.

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique et que son cardinal divise n.
2. Soit d un diviseur positif de n, n s'écrit donc $n = q.d$ avec q élément $\mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G à d éléments.

II. Groupe et ordre des éléments Soit $(G, \star)$ un groupe fini et non trivial tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e_G$.

1. Montrer que $(G, \star)$ est abelien.
2. Montrer que $(G, \star)$ est isomorphe à $((\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n, +)$.

   On proposera deux méthodes.
3. Soient g et g' des éléments d'un groupe $(G, +)$ commutaitif, d'ordres respectifs m et m'. On suppose que m et m' sont premiers entre eux. Montrer que
$$\omega(g + g') = mm'.$$
   Si l'on ne suppose plus m et m' premiers entre eux, a-t-on $\omega(g+g') = \mathrm{ppcm}(m, m')$?
4. Soient p et q deux nombre premiers distincts et G un groupe abélien de cardinal pq. Montrer que G est cyclique.
5. Soit G un groupe de cardinal $2p$ avec p premier. Montrer que G contient un élément d'ordre p.

III Indicatrice d'Euler

On appelle indicatrice d'Euler d'un entier naturel non nul n, le nombre d'éléments de $\{1, ..., n\}$ premiers avec n.

On se propose de retrouver, par une méthode probabiliste le résultat du cours sur l'indicatrice d'Euler suivant :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, dont la décomposition en nombres premiers s'écrit :
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$
où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont k nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, des éléments de $\mathbf{N}^*$. Alors
$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

On munit $\{1, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$.

1. Soit d un diviseur de n et A_d l'événement $\{k \in \{1, \dots, n\}, d|k\}$. Déterminer $\mathbf{P}(A_d)$
2. Soit $d_1, d_2, \dots, d_h$ des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux. Montrer que les événements $A_{d_1}, A_{d_2}, \dots, A_{d_h}$ sont mutuellement indépendants.
3. Conclure.
4. Soit a un entier supérieur ou égal à 1. Etudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence par :
$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

IV Valuation —

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout (k,n) élément de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$,

$$|\{j \in [\![1,n]\!], v_p(j)=k\}| = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor .$$

2. Justifier la formule suivante due à Legendre : pour tout entier naturel n,

$$v_p(n!) = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

V. Exposant d'un groupe

Dans ce paragraphe $(G,+)$ désignera un groupe abélien fini, dont le neutre sera noté 0. L'ordre d'un élément g de G sera noté $\omega(g)$.

1. Soient g et g' des éléments de G d'ordres respectifs m et m'. On suppose que m et m' sont premiers entre eux. Montrer que

$$\omega(g+g') = mm'.$$

   Si l'on ne suppose plus m et m' premiers entre eux, a-t-on $\omega(g+g') = \mathrm{ppcm}(m,m')$?

2. Soit a et b des entiers strictements positifs. Montrer l'existence de a' et b' entiers également strictement positifs tels que on ait :
   — Les relations de divisibilté $a'|a$, $b'|b$;
   — $\mathrm{pgcd}(a'b') = 1$;
   — $\mathrm{ppcm}(a,b) = a'b'$.
   Indication : On examinera les décompositions en facteurs premiers de a et b.
3. On appelle exposant du groupe G le plus petit commun multiple e des ordres des ses éléments. Montrer que G admet un élément z ayant pour ordre l'exposant du groupe G.
4. Montrer que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.

VI Groupes à 6 éléments

Soit $(G,*)$ un groupe à 6 éléments. On suppose que G n'admet pas d'élément d'ordre 6, autrement dit que G n'est pas cyclique.

1. Montrer que tout élément de G est d'ordre 2 ou 3.
2. Montrer que G possède un élément a d'ordre 3.
3. Montrer que $\langle a \rangle$ est un sous-groupe distingué.
4. Montrer que G est de la forme $\{e,a,a^2\} \cup \{b, b*a, b*a^2\}$.
5. Montrer que $b*b \notin \{b, b*a, b*a^2\}$.
6. Montrer que $b*b=e$.
7. En déduire que G est isomorphe à S_3 [9].
8. en déduire à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 6.
9. Déterminer à isomorphisme près, tout les groupes d'ordre inférieur ou égal à 7.

9. donc d'après l'exercice précédent à D_3

VII Groupe des isométries du tétraèdre 5/2

1. Montrer que dans $\mathcal{E}_3$, espace affine euclidien de dimension 3, il existe des quadruplets (A, B, C, D) constitués de 4 points distincts équidistants, c'est-à-dire tels que : $AB = AC = AD = BC = BD = CD$.
   De tels quadruplets sont appelés tétraèdres réguliers.
2. Soit (A, B, C, D) un tétraèdre régulier noté T. On désigne par $\mathcal{I}$ l'ensemble des isométries de l'espace laissant globalement invariant T.
   Montrer que $\mathcal{I}$ est un sous-groupe du groupe des isométries de l'espace.
3. Soit f un élément de $\mathcal{I}$. Nous lui associerons l'élément σ_f de l'ensemble des applications de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même, défini par, pour tout élément i de $\{1, 2, 3, 4\}$, $f(A_i) = A_{\sigma_f(i)}$.
   Montrer que σ_f est un élément du groupe symétrique $(\mathfrak{S}_4, \circ)$.
4. Montrer que l'application $\sigma \ : \ \mathcal{I} \to \mathfrak{S}_4 \, ; \, f \mapsto \sigma_f$ est un morphisme injectif du groupe $(\mathcal{I}, \circ)$ dans le groupe $(\mathfrak{S}_4, \circ)$.
5. Soient i et j des éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$, montrer que la transposition (i, j) est dans l'image de σ. En déduire que σ est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{I}, \circ)$ sur le groupe $(\mathfrak{S}_4, \circ)$..
6. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}^+$ des isométries positives (déplacements) laissant globalement invariant T, est un sous groupe de $(\mathcal{I}, \circ)$. Montrer que $(\mathcal{I}^+, \circ)$ est isomorphe au groupe alterné $(\mathrm{A}_4, \circ)$.
7. Enumérer les éléments de $\mathcal{I}^+$.
8. Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{I}^+$ laissant A_1 invariant est un sous groupe d'ordre 3 de $(\mathcal{I}^+, \circ)$.
9. Soit D_1 la droite joignant les milieux de (A_1, A_2) et de (A_3, A_4), soit D_2 la droite joignant les milieux de (A_1, A_3) et de (A_2, A_4), soit D_3 la droite joignant les milieux de (A_1, A_4) et de (A_2, A_3), soit enfin pour $i = 1, 2, 3$, R_i le retournement par rapport à la droite D_i.
   Montrer que $\{R_1, R_2, R_3\}$ engendre un groupe à 4 éléments noté H.
   Montrer que pour tout élément h de H et pour tout élément g de $\mathcal{I}^+$, $g \circ h \circ g^{-1}$ est élément de H ; on dit que H est distingué. En déduire que A_4 a un sous-groupe distingué non trivial.

VIII. Simplicité de A_5

Contrairement à A_4*, qui, nous venons de le voir, posséde un sous-groupe distingué non trivial,* A_5 *n'en possède pas. C'est un obstacle à la possibilité de résoudre l'équation du* 5^{e} *degré par radical.*

Un sous groupe H d'un groupe $(G, *)$ est dit distingué si, par définition, pour tout élément g de G, $g * H * g^{-1} \subset H$. Nous nous proposons de montrer que $(\mathrm{A}_5, \circ)$ n'a pas de sous-groupe distingué non trivial (i.e. distinct de $\{\mathrm{id}\}$ ou de A_5).

1. Combien contient-il de cycles de longueur 3, de produits de deux transpositions à supports disjoints, de 5 cycles ?
2. Calculer les produits [10]

$$(1, 2, 3, 4, 5)^{-1} \, (3, 4, 5) \, (1, 2, 3, 4, 5) \, (3, 4, 5)^{-1} \, ,$$
$$(1, 2) \, (3, 4) \, (3, 4, 5) \, (1, 2) \, (3, 4) \, (3, 4, 5)^{-1} \, .$$

10. Pour alléger l'écriture, on ne note pas la loi de composition, comme cela se fait souvent.

3. Montrer que tout sous-groupes distingué de $(\mathrm{A}_5, \circ)$, non réduit à $\{\mathrm{id}\}$ contient un cycle de longueur 3.
4. Calculer les produits, pour k élément de $\{4, 5\}$,

$$(1,2)\,(3,k)\,(2,1,3)\,(1,2)\,(3,k)\,.$$

5. Conclure...

CORRECTION DE II.

1. Posons $k = \omega(g+g')$. Alors $k \cdot (g+g') = 0$ et donc
$$0 = m \cdot (k \cdot (g+g')) = k \cdot (m \cdot g) + (km) \cdot g'.$$
Soit
$$0 = mk \cdot (g+g')) = (km) \cdot g'.$$
Donc m' divise km et comme m et m' sont premiers entre eux, le théorème de Gauss affirme que m' divise k. Par symétrie des rôles de m et m', on a aussi que m divise k. Finalement, par interprimalité de m et m' : $mm'|k$.
Mais le groupe G étant abelien, $mm' \cdot (g+g') = mm' \cdot g + mm' \cdot g'$ et donc :
$$mm' \cdot (g+g') = m' \cdot (m \cdot g) + m \cdot (m' \cdot g') = m \cdot 0 + m \cdot 0 = 0.$$
Donc k divise mm'. Au total $mm' = k$, soit :
$$\omega(g)\omega(g') = \omega(g+g').$$
Supposons g distinct de 0 de sorte que son ordre soit strictement supérieur à 1. On a immédiatement que $-g$ est aussi d'orde m. Mais $g - g = 0$, donc $g - g'$ est d'ordre 1, tandis que $\mathrm{ppcm}(\omega(g), \omega(-g)) = m \neq 1$.
2. Soit a et b des entiers strictements positifs.

   Pour tout nombre premier p posons :
$$\alpha_p = \begin{cases} v_p(a) & \text{si } v_p(a) > v_p(b), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \; ; \; \beta_p = \begin{cases} v_p(b) & \text{si } v_p(b) \geq v_p(a), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
et $a' = \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}$; $b' = \prod_{p \in P} p^{\beta_p}$. Ainsi définis, a' et b' satisfont les conditions exigées.
3. On désignera par e l'exposant de G.

   Soit z un élément de G d'ordre maximum (il en existe car G est fini). Notons $a = \omega(z)$ et prenons un élément x de G dont nous noterons b l'ordre. Définisons a' et b' comme à la question précédente ainsi que $z' = \left(\frac{a}{a'}\right) \cdot z$; $x' = \left(\frac{b}{b'}\right) \cdot x$.

   D'abord notons que $\omega(z') = a'$. En effet d'une part $a' \cdot \left(\left(\frac{a}{a'}\right) \cdot z\right) = a \cdot z = 0$. D'autre part si k est un entier tel que $0 < k < a'$, alors $k \cdot \left(\left(\frac{a}{a'}\right) \cdot z\right) = \left(k\frac{a}{a'}\right) \cdot z \neq 0$, puisque $0 < \left(k\frac{a}{a'}\right) < a = \omega(z)$. De même $\omega(x') = b'$.

   Les deux précédentes questions nous disent alors que $\omega(x'z') = a'b' = \mathrm{ppcm}(a, b)$, mais par définition de a, $\omega(x'z') \leq a$ et donc :
$$\mathrm{ppcm}(a, b) = a.$$
Donc a est un multiple commun des ordres de tous les éléments du groupe, étant lui-même l'ordre d'un élément, c'est le ppcm des ordres des éléments du groupe.

   Concluons : $e = \omega(z)$.
4. Soit $(K, +, \times)$ un corps fini. Posons $G = K \setminus \{0_K\}$ et e l'exposant du groupe $(G, \times)$

   Pour tout élément x de G on a $x^e = 1$. Donc G est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme de $K[X]$,
$$X^e - 1_k.$$
Tout repose alors sur le point suivant. La division euclidienne dont la construction est la même dans K que dans tout sous-corps de $\mathbf{C}$. L'intégrité de K fait alors que tout polynôme non nul de degré n a au plus n racines. Voyons cela.

• Le résultat est instantanné pour $n = 0$.

• Supposons le résultat vrai pour un entier n et considérons P un élément de $K[X]$ de degré $n+1$. Soit P n'a pas de racines et il en donc moins que $n+1$, soit il en a et considérons a l'une d'elles. Par division euclidienne de P par $(X-a)$, on a immédiatement

$$P = (X - a)Q,$$

avec Q un élément de $K[X]$ de degré n, le reste est en effet nul comme le montre la substitution de a à X. L'hypothèse faite assure que Q a au plus n racines, mais l'intégrité de K assure que toute racine de P est a ou une racine de Q, donc P a au plus $n+1$ racines.

Voici le résultat prouvé par récurrence.

Donc le cardinal de G est majoré par le degré de $X^e - 1$.

$$|G| \leq e.$$

Mais la question précédente fournit un élément z d'ordre e, donc

$$e = | < z > | \leq |G|.$$

Des deux inégalités vient l'égalité $|G| = e$ puis $G =< z >$. Le groupe G est donc cyclique.

Travaux dirigés n° 16

I. Polynômes cyclotomique —

On reprend le I du précédent TD. que nous compéterons.

Dans tout cet exercice, n désignera un entier strictement positif.

1. Soit G un groupe cyclique à n éléments.
   (a) Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique et que son cardinal divise n.
   (b) Soit d un diviseur positif de n, n s'écrit donc $n = q.d$ avec q élément $\mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G à d éléments.
2. On désigne par φ l'indicatrice d'Euler. Montrer que :
$$\sum_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \varphi(d) = n,$$
   (Cette somme est prise sur tous les diviseurs positifs d de n).
3. Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On appelle racines primitives m^{e} de l'unité les générateurs de $\mathcal{U}_m$, groupe des racines m^{e} de l'unité.
   (a) Quel est le nombre h_m de racines primitives m^{e} de l'unité ?
   (b) On pose :
$$\phi_m(X) := \prod_{i=1}^{h_m} (X - \xi_i),$$
   où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{h_m}$ sont les h_m racines primitives m^{e} de l'unité (polynôme cyclotomique). On pose également $\phi_1(X) := X - 1$.
   Que vaut $\phi(p)$, pour p nombre premier ?
   (c) Montrer
$$\prod_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d \mid n}} \phi_d = X^n - 1$$
   (d) En déduire que ϕ_n est élément de $\mathbf{Z}[X]$.

Extensions de corps —

1. Exemple :
   (a) Soit P le polynôme $X^3 - X - 1$.
   Montrer que P n'a pas de racines rationnelles. En déduire que P est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
   Montrer que P a une racine réelle que l'on notera ω.
   (b) Soit K le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par $(\omega^i)_{i \in \mathbf{N}}$.
   Montrer que K est de dimension finie, et donner une base simple de K.
   (c) Montrer que K est une $\mathbf{Q}$-sous-algèbre de $\mathbf{R}$, muni de sa structure naturelle de $\mathbf{Q}$-algèbre.
   (d) d) Montrer que K est un sous-corps de $\mathbf{R}$.
2. Cas général :
   Soit a un réel.

(a) Montrer que tout sous-corps de $\mathbf{R}$ contient $\mathbf{Q}$.

(b) Montrer que l'ensemble des sous-corps de $\mathbf{R}$ qui contiennent a admet un plus petit élément pour l'inclusion. On le notera dans la suite $\mathbf{Q}(a)$.

(c) Montrer que $\phi\ :\ \mathbf{Q}[X] \to \mathbf{R}\,;\ P \mapsto P(a)$ est un morphisme de la $\mathbf{Q}$-algèbres $\mathbf{Q}[X]$ dans la $\mathbf{Q}$ algèbre $\mathbf{R}$. On note $\mathbf{Q}[a]$ son image.

(d) Soit $I := \{P \in \mathbf{Q}\left[X\right], P\left(a\right) = 0\}$. Montrer que I est un idéal de $\mathbf{Q}[X]$.

(e) Le réel a est dit algébrique (sur $\mathbf{Q}$), si, par définition, a est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers.
Montrer que a est algèbrique si et seulement si I est non réduit à $\{0\}$.
Dans toute la suite, sauf la dernière question, on suppose que a est algèbrique.

(f) Montrer qu'il existe un et un seul élément de $\mathbf{Q}[X]$ unitaire, μ_a, tel que $I = \mu_a\mathbf{Q}[X]$. Montrer que μ_a est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$. Montrer que si a est irrationnel, alors le degré de μ_a est supérieur ou égal à 2. Déterminer μ_a pour $a = \sqrt{2}$ et pour $a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

(g) Montrer que $\mathbf{Q}[a]$ est un corps. Montrer que $\mathbf{Q}(a) = \mathbf{Q}[a]$.
Montrer que $\mathbf{Q}(a)$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension n où n est le degré de μ_a, dont on donnera une base simple.

(h) Si a est non algébrique, montrer qu'alors $\mathbf{Q}(a)$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie [11].

III. Entiers de Gauss et théorème des deux carrés

on complète ici un exercice vu en cours...

1. Entiers de Gauss

Soient $\mathbf{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $u + iv$, avec $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ et l'application. $\varphi\,;\ \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{N}\,;\ a \mapsto \bar{a}a$.

(a) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un sous-anneau du corps $\mathbf{C}$.

(b) Déterminer $\mathbf{Z}[i]^*$, ensemble des éléments inversibles de $\mathbf{Z}[i]$.

(c) Montrer que pour tout élément a de $\mathbf{Z}[i]$ et tout élément b de $\mathbf{Z}[i] \setminus \{0\}$, il existe un couple (q, r) d'éléments de $\mathbf{Z}[i]$ tel que $a = bq+r$ et $\varphi(r) < \varphi(b)$. On dit que l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ est euclidien pour φ.

(d) Montrer que tout idéal de $\mathbf{Z}[i]$ est de la forme $a\mathbf{Z}[i]$, on dit que $\mathbf{Z}[i]$ est principal.

Il résulte de cette sous question que les théorème de Bezout et Gauss au programme dans $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ sont vrai dans $\mathbf{Z}[i]$

Définition *Un élément a d'un anneau intègre est dit irréductible si par définition il n'est pas inversible et, si il admet la décomposition $a = bc$, alors a ou b est inversible.*

(e) Montrer que tout élément x de $\mathbf{Z}[i]$ non nul et soit inversible, soit un produit d'irréductibles.

2. Carrés dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$

Soit p un nombre premier impair et y un élément de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$, on dit que y est un carré s'il existe un élément z de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ tel que $z^2 = y$.

(a) Montrer que $\displaystyle\prod_{x\in(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*} x = \begin{cases} -y^{\frac{p-1}{2}}, & \text{si } y \text{ est un carré,} \\ y^{\frac{p-1}{2}}, & \text{sinon .}\end{cases}$

pourra regrouper deux à deux dans le produit les termes x et yx^{-1}.

11. On pourrait montrer que $\mathbf{Q}(a)$ est isomorphe en tant que corps au corps $\mathbf{Q}(X)$.

(b) En déduire

$$\begin{cases} y^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}, & \text{si } y \text{ est un carré,} \\ y^{\frac{p-1}{2}} = -\bar{1}, & \text{sinon .} \end{cases}$$

3. On se propose de montrer le résultat suivant :

Théorème des deux carrés — *Soit n un entier naturel. Il est la somme de deux carrés d'entiers si et seulement si tout nombre premier p congru à 3 modulo 4 apparaît dans la décomposition de n avec un exposant pair (éventuellement nul bien sûr!)*

Soit n en entier naturel.

(a) *Une cractérisation.*

Montrer n est la somme de deux carrés d'entiers si seulement si il existe un entier de Gauss x tel que $n = \varphi(x)$. En déduire que l'ensemble S_2 des entiers naturels sommes de deux carrés d'entiers est stable par le produit.

(b) Montrer qu'un nombre premier q qui est congru à 3 modulo 4, n'est pas la somme de de deux carrés.

(c) *le sens direct*

Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4.

On regardera la congruence modulo 4 *d'un carré.*

i. En utilisant la question 2, montrer qu'il existe un entier naturel m et un entier naturel a tels que :

$$mp = (a+i)(a-i).$$

ii. Montrer que p ne divise ni $(a+i)$ ni $(a-i)$, en déduire que p n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$.

iii. En déduire que p est la somme de deux carrés.

iv. Montrer que si tout nombre premier p congru à 3 modulo 4 apparaît dans la décomposition de n avec un exposant pair alors n est la somme de deux carrés.

Passons à la réciproque.

(d) *irréductibles de* $\mathbf{Z}[i]$

i. Soit $x = \alpha + i\beta$ un élément de $\mathbf{Z}[i]$ tel que $\varphi(x)$ soit un nombre premier p. Montrer que x et $\bar{x}$ sont des irréductibles de $\mathbf{Z}[i]$ et que tout élément y de $\mathbf{Z}[i]$ tel que $\varphi(y) = p$ est associé à x ou $\bar{x}$ (c'est-à-dire le produit de x ou $\bar{x}$ et d'un inversible).

ii. Soit q un nombre premier qui n'est pas la somme de deux carrés d'entiers. Montrer que q est irréductible et que les seuls éléments y de $\mathbf{Z}[i]$ tels que $\varphi(y) = q^2$ sont les éléments associés à q.

iii. Montrer que les irréductibles de $\mathbf{Z}[i]$ sont les éléments associés aux éléments de la forme :

— les éléments $x = \alpha + i\beta$ tels que $\varphi(x)$ soit un nombre premier p;

— les nombres premiers q qui ne sont pas la somme de deux carrés d'entiers.

On pourra prendre z un irréductible de $\mathbf{Z}[i]$ *et montrer que z divise un diviseur premier p de $\varphi(z)$.m*

(e) *Réciproque de (c).* Montrer que si n est la somme de deux carrés d'entiers, alors tout nombre premier p congru à 3 modulo 4 apparaît dans la décomposition de n avec un exposant pair.

On pourra écrire n sous la forme $\varphi(z)$ et décomposer z en produit d'irréductibles.

CORRECTION DE I.

1. *Il est possible de calquer la réponse sur la démonstration de la structure des sous-groupes de* $\mathbf{Z}$*, résultat qui du reste pourrait s'énoncer, puisque* $\mathbf{Z}$ *est le modèle de groupe monogène infini, ainsi : tout sous-groupe d'un groupe monogène infini, est monogène infini. Nous choisirons toutefois de recourir à un artifice qui déduit le résultat de la structure des sous-groupe de* $\mathbf{Z}$*, nous épargnant ainsi de refère, à peu de chose près, un travail bien connu.*

   L'abélianité de G (il est cyclique) nous permet d'user pour G d'une notation additive. Soit l'application
   $$\phi \ : \ \mathbf{Z} \to G\,;\ k \mapsto k \cdot a,$$
   où a est un générateur de G. On a vu — et c'est du cours — que ϕ est un morphisme de groupes, surjectif. Prenons un sous-groupe H de G. Son image réciproque par le morphisme ϕ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$, il est donc de la forme $p\mathbf{Z}$, avec $p \in \mathbf{N}$. Mais la surjectivité de ϕ donne :
   $$H = \phi\Big(\phi^{-1}\left(H\right)\Big).$$
   Donc $H = \phi(p\mathbf{Z}) = \{(k \times p) \cdot a, k \in \mathbf{Z}\} = \{k \cdot (p \cdot a), k \in \mathbf{Z}\} = \langle p \cdot a \rangle$. Donc H est monogène, de cardinal fini par inclusion dans G, il est même cyclique.

   Complément. Démontrons la propriété utilisée dans cette preuve ; *si f est une surjection d'un ensemble A dans un ensemble B, alors pour toute partie C de B :*
   $$f(f^{-1}(C)) = C.$$

   Par définition de l'image réciproque $f(f^{-1}(C)) \subset C$. Soit maintenant, c est un élément de C, alors la surjectivité de f permet de choisir d un de ces antécédants par f et alors $c = f(d)$ et $d \in f^{-1}(C)$, donc $c \in f(f^{-1}(C))$. D'où $f(f^{-1}(C)) \supset C$. Conclusion $f(f^{-1}(C)) = C$.

2. Comme G est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, il est loisible de prendre $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour G.

   • D'abord $\bar{q}$ engendre un groupe à d éléments.

   En effet, d'une part $d \cdot \bar{q} = \overline{dq} = \bar{n} = \bar{0}$ et donc $\omega(q)$ divise d. D'autre part par définition de l'ordre de q,
   $$\bar{0} = \omega(q)\bar{q} = \overline{\omega(q)q},$$
   donc n divise $\omega(q)q$ et donc d divise $\omega(q)$. La positivité de $\omega(q)$ et de d ne laisse que $\omega(q) = q$.

   • Soit H un sous groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ à d éléments. Par 1, H est cyclique, désignons par $\bar{q}'$ un de ses générateurs. Alors $\overline{dq'} = d \cdot \bar{q}' = \bar{0}$, donc n divise dq', et donc q divise q', donc finalement $H = \langle \bar{q}' \rangle \subset \langle \bar{q} \rangle$. Mais par égalité de leurs cardinaux les groupes H et $\langle \bar{q} \rangle$, sont égaux.

   Donc $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ admet comme seul groupe à d éléments le groupe engendré par $\bar{q}$.

3. Notons D_n, l'ensemble des diviseurs positifs de n et pour tout d élément de D_n, notons O_d l'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ d'ordre d et H_d LE sous-groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ d'ordre d.

   On a :
   $$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \biguplus_{d \in D_n} O_d \tag{13}$$

   En effet tout élément a de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ a comme ordre un diviseur de n et donc est élément d'un des O_d, $d \in D_n$ et, ne pouvant avoir qu'un ordre, n'est élément que d'un de ces ensembles.

Donc
$$n = |\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}| = \sum_{d\in D_n} |O_d|. \tag{14}$$
Soit à présent $\delta \in D_n$. Tout élément de O_δ, engendre par définition même de O_δ un sous groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de cardinal δ, qui, par la question 1, ne peut être que H_δ ; Réciproquement tout générateur de H_δ est d'ordre δ, donc élément de O_δ. Ainsi O_δ est l'ensemble des générateurs de H_d, donc $|O_\delta| = \varphi(\delta)$, puisque H_δ, qui est cyclique d'ordre δ, est isomorphe à $\mathbf{Z}/\delta\mathbf{Z}$.

Donc (16) devient :
$$n = \sum_{d\in D_n} \varphi(d).$$

4. Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On appelle racines primitives m^{e} de l'unité les générateurs de $\mathcal{U}_m$, groupe des racines m^{e} de l'unité.
   (a) Le nombre h_m de racines primitives m^{e} de l'unité est $\varphi(m)$, puisque $\mathcal{U}_n$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.
   (b) Le cours nous dit que $\varphi(p) = p - 1$, autrement dit tout élément distinct de 1 de $\mathcal{U}_p$ engendre ce groupe. Donc en faisant une courte excursion dans $\mathbf{C}(X)$,
$$\phi_p = \prod_{\omega\in\mathcal{U}_p\setminus\{1\}} X - \omega = \frac{X^p - 1}{X - 1} = 1 + X + X^2 + ... + X^{p-1}.$$
   (c) L'ordre de tout élément de $\mathcal{U}_n$ est élément de D_n, donc en notant pour tout $d \in d_n$, O_d, l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}_n$ d'indice d, comme dans 3,
$$\mathcal{U}_n = \biguplus_{d\in D_n} O_d.$$
   Mais 1. nous apprend que pour tout $d \in D_n$ le groupe $\mathcal{U}_n$ admet un et un seul sous-groupe d'ordre d celui-ci est connu, c'est $\mathcal{U}_d$ (qui est bien un groupe d'ordre d inclus dans $\mathcal{U}_n$, et donc les éléments de O_d sont les générateurs de$\mathcal{U}_d$, autrement dit les racines primirives d^{e} de l'unité. Donc :
$$X^n - 1 = \prod_{\omega\in\mathcal{U}_n} X - \omega = \prod_{d\in D_n}\left(\prod_{\omega\in O_d}(X - \omega)\right) = \prod_{d\in D_n} \phi_d$$
   (d) Notre réponse se fonde sur le résultat suivant

   Lemme : *Soit A un élément de $\mathbf{Z}[X]$ et B un élément de $\mathbf{Z}[X]$ unitaire. Alors le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B effectuée dans $\mathbf{Q}[X]$ sont éléments de $\mathbf{Z}[X]$* [12].

   Preuve du lemme : Soit B un polynôme unitaire, à coefficients entiers

   Récurrons sur le degré de A

   • Le cas où $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(A) < \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(B)$ ne pose pas de problème : le quotient est nulle et le reste vaut A, les deux sont éléments de $\mathbf{Z}[X]$.

   • Soit $d \in [\![\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(B) - 1, +\infty[\![$. Supposons le résultat acquis pour A de degré inférieur ou égal à d. Prenons alors $A \in \mathbf{Z}[X]$ de degré $d + 1$. Notons $a_{d+1}X^{d+1}$ le monôme

12. Plus généralement on a le résultat suivant guère plus difficile à montrer. Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif. Soient A et B des élément de $\mathcal{A}[X]$. On suppose que B est non nul et que son coefficient dominant est un élément inversible de $\mathcal{A}$ Alors il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $\mathcal{A}[X]$ tel que $A = QB + R$ et $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(R) < \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(B)$

dominant de A. Ainsi $A - a_{d+1}B$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à d et à coefficients entiers. Par division euclidienne et par l'hypothèse de récurrence il s'écrit : $A - a_{d+1}B = Q'B + R'$ avec (Q', R') dans $(\mathbf{Z}[X])^2$ et $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(R') < \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(B)$, mais alors puisque

$$A = (Q' + a_{d+1}X^{d+1})B + R'$$

le reste dans la division de A par B (dans $\mathbf{Q}[X]$) est R', le quotient $(Q' + a_{d+1}X^{d+1})$, ils sont tous deux dans $\mathbf{Z}[X]$.

D'où le résultat pour A de degré $d + 1$.

Par récurrence le lemme est vrai.

Par récurence sur n on montre alors sans mal que ϕ_n est à coefficients entiers. L'initialisation est sans malice. Supposons que ϕ_1, ϕ_2,..., ϕ_{n-1} soient éléments de $\mathbf{Z}[X]$, pour un entier $n \geq 2$. Alors par (c), ϕ_n est le quotient de $X^n - 1$ par le polynôme unitaire $\prod_{k \in D_n \setminus \{n\}} \phi_k$ qui est, grâce à l'hypothèse de récurrence, à coefficients entiers ($\mathbf{Z}$ est un anneau), donc, par le lemme, ϕ_n est à coefficients entiers.

Les polynômes cyclotomiques sont éléments de $\mathbf{Z}[X]$.

Travaux dirigés n° 16

Nous étudirons en cours l'application φ de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}$ qui à un entier $n \geq 1$ associe le nombre d'éléments de $\{1, 2, ..., n\}$ premiers avec$n$. Cette application s'appelle it indicatrice d'Euler. On montrera que $\phi(n)$ est pour tout $n \in \mathbf{N}$ le nombre de générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

I. Groupe cyclique

Soit G un groupe cyclique à n éléments.

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique et que son cardinal divise n.
2. Soit d un diviseur positif de n, n s'écrit donc $n = q.d$ avec q élément $\mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de G à d éléments.
3. On désigne par φ l'indicatrice d'Euler. Montrer que : $\sum\limits_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d|n}} \varphi(d) = n$, (Cette somme est prise sur tous les diviseurs positifs d de n).
4. Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On appelle racines primitives m^{e} de l'unité les générateurs de $\mathcal{U}_m$, groupe des racines m^{e} de l'unité.

   (a) Quel est le nombre h_m de racines primitives m^{e} de l'unité ?

   (b) On pose : $\phi_m(X) := \prod\limits_{i=1}^{h_m} (X - \xi_i)$, où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{h_m}$ sont les h_m racines primitives m^{e} de l'unité (polynôme cyclotomique). On pose également $\phi_1(X) := X - 1$.
   Que vaut ϕ_p, pour p nombre premier ?

   (c) Montrer
   $$\prod_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d|n}} \phi_d = X^n - 1$$

   (d) En déduire que ϕ_n est élément de $\mathbf{Z}[X]$.

II. Indicatrice d'Euler

On se propose de retrouver, par une méthode probabiliste le résultat du cours sur l'indicatrice d'Euler suivant. *Soit n un entier supérieur ou égal à 2, dont la décomposition en nombres premiers s'écrit :*
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$
où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont k nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, des éléments de $\mathbf{N}^*$. Alors :
$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

On munit $\{1, \ldots, n\}$ de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$.

1. Soit d un diviseur de n et A_d l'événement $\{k \in \{1, \ldots, n\}, d|k\}$. Déterminer $\mathbf{P}(A_d)$
2. Soit $d_1, d_2, \ldots, d_h$ des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux. Montrer que les événements $A_{d_1}, A_{d_2}, \ldots, A_{d_h}$ sont mutuellement indépendants. et conclure.
3. Soit un entier $a \geq 1$.Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par récurrence par :

$$x_0 = a\,;\ \forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

III. Valuation —

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout (k,n) élément de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$,

$$|\{j \in [\![1,n]\!], v_p(j) = k\}| = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor .$$

2. Justifier la formule suivante due à Legendre : pour tout entier naturel n,

$$v_p(n!) = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

$(G,+)$ désignera un groupe abélien fini, dont le neutre sera noté 0. L'ordre d'un élément g de G sera noté $\omega(g)$.

IV. EXPOSANT D'UN GROUPE

Dans ce paragraphe $(G,+)$ désignera un groupe abélien fini, dont le neutre sera noté 0. L'ordre d'un élément g de G sera noté $\omega(g)$.

1. Soient g et g' des éléments de G d'ordres respectifs m et m'. On suppose que m et m' sont premiers entre eux. Montrer que

$$\omega(g+g') = mm'.$$

   Si l'on ne suppose plus m et m' premiers entre eux, a-t-on $\omega(g+g') = \mathrm{ppcm}(m,m')$?

2. Soit a et b des entiers strictements positifs. Montrer l'existence de a' et b' entiers également strictement positifs tels que on ait :
   — Les relations de divisibilté $a'|a$, $b'|b$;
   — $\mathrm{pgcd}(a'b') = 1$;
   — $\mathrm{ppcm}(a,b) = a'b'$.
   Indication : On examinera les décompositions en facteurs premiers de a et b.
3. On appelle exposant du groupe G le plus petit commun multiple e des ordres des ses éléments. Montrer que G admet un élément z ayant pour ordre l'exposant du groupe G.
4. *Complément* Montrer que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.

CORRECTION DE I.

1. *Il est possible de calquer la réponse sur la démonstration de la structure des sous-groupes de* $\mathbf{Z}$*, résultat qui du reste pourrait s'énoncer, puisque* $\mathbf{Z}$ *est le modèle de groupe monogène infini, ainsi : tout sous-groupe d'un groupe monogène infini, est monogène infini. Nous choisirons toutefois de recourir à un artifice qui déduit le résultat de la structure des sous-groupe de* $\mathbf{Z}$*, nous épargnant ainsi de refère, à peu de chose près, un travail bien connu.*

   L'abélianité de G (il est cyclique) nous permet d'user pour G d'une notation additive. Soit l'application
$$\phi \;:\; \mathbf{Z} \to G\,;\; k \mapsto k \cdot a,$$
   où a est un générateur de G. On a vu — et c'est du cours — que ϕ est un morphisme de groupes, surjectif. Prenons un sous-groupe H de G. Son image réciproque par le morphisme ϕ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}$, il est donc de la forme $p\mathbf{Z}$, avec $p \in [\![1, n]\!]$. Mais la surjectivité de ϕ donne :
$$H = \phi\Big(\phi^{-1}(H)\Big).$$
   Donc $H = \phi(p\mathbf{Z}) = \{(k \times p) \cdot a, k \in \mathbf{Z}\} = \{k \cdot (p \cdot a), k \in \mathbf{Z}\} = \langle p \cdot a \rangle$. Donc H est monogène, de cardinal fini par inclusion dans G, il est même cyclique.

   Complément. Démontrons la propriété utilisée dans cette preuve ; *si f est une surjection d'un ensemble A dans un ensemble B, alors pour toute partie C de B :*
$$f(f^{-1}(C)) = C.$$

   Par définition de l'image réciproque $f(f^{-1}(C)) \subset C$. Soit maintenant, c est un élément de C, alors la surjectivité de f permet de choisir d un de ces antécédants par f et alors $c = f(d)$ et $d \in f^{-1}(C)$, donc $c \in f(f^{-1}(C))$. D'où $f(f^{-1}(C)) \supset C$. Conclusion $f(f^{-1}(C)) = C$.

2. Comme G est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, il est loisible de prendre $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour G.

   • D'abord $\bar{q}$ engendre un groupe à d éléments.

   En effet, d'une part $d \cdot \bar{q} = \overline{dq} = \bar{n} = \bar{0}$ et donc $\omega(q)$ divise d. D'autre part par définition de l'ordre de q,
$$\bar{0} = \omega(q)\bar{q} = \overline{\omega(q)q},$$
   donc n divise $\omega(q)q$ et donc d divise $\omega(q)$. La positivité de $\omega(q)$ et de d ne laisse que $\omega(q) = q$.

   • Soit H un sous groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ à d éléments. Par 1, H est cyclique, désignons par q' un de ses générateurs. Alors $\overline{dq'} = d \cdot \bar{q}' = \bar{0}$, donc n divise dq', et donc q divise q', donc finalement $H = \langle \bar{q}' \rangle \subset \langle \bar{q} \rangle$. Mais par égalité de leurs cardinaux les groupes H et $\langle \bar{q} \rangle$, sont égaux.

   Donc $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ admet comme seul groupe à d éléments le groupe engendré par $\bar{q}$.

3. Notons D_n, l'ensemble des diviseurs positifs de n et pour tout d élément de D_n, notons O_d l'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ d'ordre d et H_d LE sous-groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ d'ordre d.

   On a :
$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \biguplus_{d \in D_n} O_d \tag{15}$$

   En effet tout élément a de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ a comme ordre un diviseur de n et donc est élément d'un des O_d, $d \in D_n$ et, ne pouvant avoir qu'un ordre, n'est élément que d'un de ces ensembles.

Donc

$$n = |\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}| = \sum_{d \in D_n} |O_d|. \tag{16}$$

Soit à présent $\delta \in D_n$. Tout élément de O_δ, engendre par définition même de O_δ un sous groupe de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de cardinal δ, qui, par la question 1, ne peut être que H_δ ; Réciproquement tout générateur de H_δ est d'ordre δ, donc élément de O_δ. Ainsi O_δ est l'ensemble des générateurs de H_d, donc $|O_\delta| = \varphi(\delta)$, puisque H_δ, qui est cyclique d'ordre δ, est isomorphe à $\mathbf{Z}/\delta\mathbf{Z}$.

Donc (16) devient :

$$n = \sum_{d \in D_n} \varphi(d).$$

4. Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On appelle racines primitives m^{e} de l'unité les générateurs de $\mathcal{U}_m$, groupe des racines m^{e} de l'unité.

(a) Le nombre h_m de racines primitives m^{e} de l'unité est $\varphi(m)$, puisque $\mathcal{U}_n$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

(b) Le cours nous dit que $\varphi(p) = p - 1$, autrement dit tout élément distinct de 1 de $\mathcal{U}_p$ engendre ce groupe. Donc en faisant une courte excursion dans $\mathbf{C}(X)$,

$$\phi_p = \prod_{\omega \in \mathcal{U}_p \setminus \{1\}} X - \omega = \frac{X^p - 1}{X - 1} = 1 + X + X^2 + ... + X^{p-1}.$$

(c) L'ordre de tout élément de $\mathcal{U}_n$ est élément de D_n, donc en notant pour tout $d \in d_n$, O_d, l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}_n$ d'indice d, comme dans 3,

$$\mathcal{U}_n = \biguplus_{d \in D_n} O_d$$

Mais 1. nous apprend que pour tout $d \in D_n$ $\mathcal{U}_n$ admet un et un seul sous-groupe d'ordre d celui-ci est connu, c'est $\mathcal{U}_d$ (qui est bien un groupe d'ordre d inclus dans $\mathcal{U}_n$, et donc les éléments de O_d sont les générateurs de $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$, autrement dit les racines primirives d^{e} de l'unité. Donc :

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathcal{U}_n} X - \omega = \prod_{d \in D_n} \left(\prod_{\omega \in O_d} (X - \omega) \right) = \prod_{d \in D_n} \phi_d$$

(d) Notre réponse se fonde sur le résultat suivant

Lemme : *Soit A un élément de $\mathbf{Z}[X]$ et B un élément de $\mathbf{Z}[X]$ unitaire. Alors le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B effectuée dans $\mathbf{Q}[X]$ sont éléments de $\mathbf{Z}[X]$* [13].

Preuve du lemme : Soit B un polynôme unitaire, à coefficients entiers

Récurrons sur le degré de A

• Le cas où $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(A) < \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(B)$ ne pose pas de problème : le quotient est nulle et le reste vaut A, les deux sont éléments de $\mathbf{Z}[X]$.

• Soit $d \in [\![\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(B) - 1, +\infty[\![$. Supposons le résultat acquis pour A de degré inférieur ou égal à d. Prenons alors $A \in \mathbf{Z}[X]$ de degré $d + 1$. Notons $a_n X^n$ le monôme

13. Plus généralement on a le résultat suivant guère plus difficile à montrer. Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif. Soient A et B des élément de $\mathcal{A}[X]$. On suppose que B est non nul et que son coefficient dominant est un élément inversible de $\mathcal{A}$ Alors il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $\mathcal{A}[X]$ tel que $A = QB + R$ et $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(R) < \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(B)$

dominant de A. Ainsi $A - a_n B$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à d et à coefficients entiers. Par division euclidienne et par l'hypothèse de récurrence il s'écrit : $A - a_n B = Q'B + R'$ avec (Q', R') dans $(\mathbf{Z}[X])^2$ et $\mathrm{d}^o(R') < \mathrm{d}^o(B)$, mais alors puisque

$$A = (Q' + a_n X^n)B + R'$$

le reste dans la division de A par B (dans $\mathbf{Q}[X]$) est R', le quotient $(Q' + a_n X^n)$, ils sont tous deux dans $\mathbf{Z}[X]$.

D'où le résultat pour A de degré $d + 1$.

Par récurrence le lemme est vrai.

Par récurence sur n on montre alors sans mal que ϕ_n est à coefficients entiers. L'initialisation est sans malice. Supposons que ϕ_1, ϕ_2,..., ϕ_{n-1} soient éléments de $\mathbf{Z}[X]$, pour un entier $n \geq 2$. Alors par (c), ϕ_n est le quotient de $X^n - 1$ par le polynôme unitaire $\prod_{k \in D_n \setminus \{n\}} \phi_k$ qui est grâce à l'hypothèse de récurrence à coefficients entiers ($\mathbf{Z}$ est un anneau), donc, par le lemme, ϕ_n est à coefficients entiers.

Les polynômes cyclotomiques sont éléments de $\mathbf{Z}[X]$.

CORRECTION DE IV.

1. Posons $k = \omega(g + g')$. Alors $k \cdot (g + g') = 0$ et donc

$$0 = m \cdot (k \cdot (g + g')) = k \cdot (m \cdot g) + (km) \cdot g'.$$

Soit

$$0 = mk \cdot (g + g')) = (km) \cdot g'.$$

Donc m' divise km et comme m et m' sont premiers entre eux, le théorème de Gauss affirme que m' divise k. Par symétrie des rôles de m et m', on a aussi que m divise k. Finalement, par interprimalité de m et m' : $mm'|k$.
Mais le groupe G étant abelien, $mm' \cdot (g + g') = mm' \cdot g + mm' \cdot g'$ et donc :

$$mm' \cdot (g + g') = m' \cdot (m \cdot g) + m \cdot (m' \cdot g') = m \cdot 0 + m \cdot 0 = 0.$$

Donc k divise mm'. Au total $mm' = k$, soit :

$$\omega(g)\omega(g') = \omega(g + g').$$

Supposons g distinct de 0 de sorte que son ordre soit strictement supérieur à 1. On a immédiatement que $-g$ est aussi d'orde m. Mais $g - g = 0$, donc $g - g'$ est d'ordre 1, tandis que $\mathrm{ppcm}(\omega(g), \omega(-g)) = m \neq 1$.

2. Soit a et b des entiers strictements positifs.

Pour tout nombre premier p posons :

$$\alpha_p = \begin{cases} v_p(a) & \text{si } v_p(a) > v_p(b), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad ; \ \beta_p = \begin{cases} v_p(b) & \text{si } v_p(b) \geq v_p(a), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $a' = \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}$; $b' = \prod_{p \in P} p^{\beta_p}$. Ainsi définis, a' et b' satisfont les conditions exigées.

3. On désignera par e l'exposant de G.

Soit z un élément de G d'ordre maximum (il en existe car G est fini). Notons $a = \omega(z)$ et prenons un élément x de G dont nous noterons b l'ordre. Définisons a' et b' comme à la question précédente ainsi que $z' = \left(\frac{a}{a'}\right) \cdot z$; $x' = \left(\frac{b}{b'}\right) \cdot x$.

D'abord notons que $\omega(z') = a'$. En effet d'une part $a' \cdot \left(\left(\frac{a}{a'}\right) \cdot z\right) = a \cdot z = 0$. D'autre part si k est un entier tel que $0 < k < a'$, alors $k \cdot \left(\left(\frac{a}{a'}\right) \cdot z\right) = \left(k\frac{a}{a'}\right) \cdot z \neq 0$, puisque $0 < \left(k\frac{a}{a'}\right) < a = \omega(z)$. De même $\omega(x') = b'$.

Les deux précédentes questions nous disent alors que $\omega(x'z') = a'b' = \text{ppcm}(a, b)$, mais par définition de a, $\omega(x'z') \leq a$ et donc :

$$\text{ppcm}(a, b) = a.$$

Donc a est un multiple commun des ordres de tous les éléments du groupe, étant lui-même l'ordre d'un élément, c'est le ppcm des ordres des éléments du groupe.

Concluons : $e = \omega(z)$.

4. **Complément.** *On déduit de ce résultat que le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.*

PREUVE.

Soit $(K, +, \times)$ un corps fini. Posons $G = K \setminus \{0_K\}$ et e l'exposant du groupe $(G, \times)$

Pour tout élément x de G on a $x^e = 1$. Donc G est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme de $K[X]$,

$$X^e - 1_k.$$

Tout repose alors sur le point suivant. La division euclidienne dont la construction est la même dans K que dans tout sous-corps de $\mathbf{C}$. L'intégrité de K fait alors que tout polynôme non nul de degré n a au plus n racines. Voyons cela.

• Le résultat est instantanné pour $n = 0$.

• Supposons le résultat vrai pour un entier n et considérons P un élément de $K[X]$ de degré $n+1$. Soit P n'a pas de racines et il en donc moins que $n+1$, soit il en a et considérons a l'une d'elles. Par division euclidienne de P par $(X-a)$, on a immédiatement

$$P = (X - a)Q,$$

avec Q un élément de $K[X]$ de degré n, le reste est en effet nul comme le montre la substitution de a à X. L'hypothèse faite assure que Q a au plus n racines, mais l'intégrité de K assure que toute racine de P est a ou une racine de Q, donc P a au plus $n+1$ racines.

Voici le résultat prouvé par récurrence.

Donc le cardinal de G est majoré par le degré de $X^e - 1$.

$$|G| \leq e.$$

Mais la question précédente fournit un élément z d'ordre e, donc

$$e = | < z > | \leq |G|.$$

Des deux inégalités vient l'égalité $|G| = e$ puis $G =< z >$. Le groupe G est donc cyclique.

Travaux dirigés n° 17

I. FONCTION ZÊTA et ZÊTA ALTERNÉE

Soient F et ζ les applications de la variable réelle x définies par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \; ; \; \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Donner les domaines de définition de F et ζ. On admettra que $F(1) = \ln(2)$.
2. Montrer que F est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que pour tout réel $x > 1$,

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

   En déduire l'existence de réels a et b, que l'on exprimera à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$, tels que l'on ait :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + \underset{x \to 1^+}{\mathrm{o}}(1).$$

4. (5/2) et même (3/2) Montrer que $F(1) = \ln(2)$.
5. Retrouver un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement supérieures, par une autre méthode que celle du 3.

II. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES, SOLUTIONS PÉRIODIQUES

Soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de réels tel que $a_n = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

1. Montrer la convergence de la série d'application $\sum\limits_{n \geq 1} a_n \sin(n\, \cdot)$. On note f sa somme.

   Montrer la continuité de f.
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, donner l'ensemble S_n des solutions sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + x = \sin(nt). \tag{e_n}$$

3. Déterminer l'ensemble S des solutions réelle définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles de

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + x = f(t).$$

   On exprimera les solutions au moyen de la somme d'une série. Cette équation a-t-elle des solutions périodiques ?
4. Soit h une application 2π périodique. Soit ϕ une solution sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles de

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - x = h(t). \tag{2}$$

   Montrer que ϕ est 2π périodique si et seulement si $\phi(2\pi) = \phi(0)$ et $\phi'(2\pi) = \phi'(0)$.

   Combien (2) possède-t-elle de solutions sur $\mathbf{R}$ qui soient 2π-périodiques.

III. ÉQUATION DE LA CHALEUR SUR UN SEGMENT

Nous allons donné une version écourtée du problème historique de la propagation de la chaleur dans une barre, qui conduisit Fourier à inventer ses célèbres séries, que nous proposâmes aux 5/2 dans le TD 15.

Soit $\sum_{n\geq 1} b_n$ une série de nombre réels, absolument convergeante.

1. Soit la série d'appications $\sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\,\cdot)$. Monter qu'elle converge.

   On note f sa somme. Montrer que f est continue.

   Nous allons rechercher l'ensemble $\mathcal{K}$ des applications

$$u \;:\; [0,\pi]\times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\;;\; (x,t)\mapsto u(x,t),$$

continues telles que l'on ait :

— u admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $[0,\pi]\times\mathbf{R}_+^*$ continues ;

— u admet une dérivées partielles d'ordre 2 en x sur $[0,\pi]\times\mathbf{R}_+^*$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cdot,t)$ et pour tout réel $t>0$ continue.

— Pour tout élément x de $[0,\pi]$ et tout élément t de $\mathbf{R}_+^*$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,. \tag{17}$$

— Pour tout élément t de $\mathbf{R}_+$,

$$u\,(0,t)=u\,(\pi,t)=0. \tag{18}$$

— Pour tout élément x de $[0,\pi]$,

$$u\,(x,0)=f\,(x)\,. \tag{19}$$

2. Pour tout entier $n\geq 1$ on considère

$$u_n \;:\; [0,\pi]\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}\;;\;(x,t)\mapsto \sin(n\,x)\exp\left(-(n)^2 t\right).$$

   Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, montrer que u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie (18) et (17).

3. On considère la série d'applications $\sum_{n\geq 1} b_n u_n$. Montrer que la série converge. Montrer que sa somme est élément de $\mathcal{K}$.

IV. ÉQUATION DE LA CHALEUR SUR $\mathbf{R}_+$

Réservé aux 5/2

On étudie la résolution de l'équation de la chaleur dans une demi droite avec comme condition initiale un cosinus

On s'intéresse à l'ensemble S des applications de $\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que :

— pour tout $(t,x)\in\mathbf{R}_+^*,\times\mathbf{R}$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ existent et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\,; \tag{20}$$

— pour tout $x\in\mathbf{R}$, $f(t,x)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\cos x$.

On pourra utiliser dans la suite que : $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$

1. Soit l'application
$$\phi \;:\; \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}\,;\; (t,x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right).$$
Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie (20).
2. On considère l'application
$$f \;:\; \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}\,;\; (t,x) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-y^2}{2t}\right) \cos(y-x)\mathrm{d}y.$$
Justifiez que f est bien définie et élément de S.
3. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$$
Calculer pour tout entier naturel n, M_n. En déduire une expression de f qui ne fasse pas appel au signe intégrale.
4. Reprendre la question précédente en utilisant une équation différentielle.

V. NOMBRE DE CLASSES DE CONJUGAISON D'UN GROUPE (X-ÉNS).

Soit $(G, *)$ un groupe non abélien fini. On munit $G \times G$ de la probabilité uniforme et on note $n(G)$ la probabilité de l'événement

$$\{(x, y) \in G \times G | x * y = y * y\}$$

, ou dit moins froidement « la probabilité qu'un couple éléments de G ait ses deux composantes qui commutent ».

Le but de l'exercice est de prouver l'inégalité $\boxed{n(G) \leq 5/8}$

Soit H un sous groupe de G, il a été vu en exercice que la relation sur G défini par $a\mathcal{R}b$ si, par définition $a^{-1}b \in H$ est une relation d'équivalence. Le cardinal de l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation, est égal à $\frac{|G|}{|H|}$ et s'appelle l'indice de H. C'est sûrement pour cette raison que l'on note G/H l'ensemble des classes d'équivalence plutôt que $G/\mathcal{R}$.

1. Soit H un sous-groupe de G tel que pour tout $a \in G$ on ait : $aH = Ha$ (sous-groupe distingué). Montrer que G/H ce muni d'une loi interne $\underset{H}{*}$ telle que $(H, \underset{H}{*})$ soit un groupe et l'application de G dand G/H qui à un élément associe sa classe d'équivalence soit un morphisme de groupe (groupe quotient).

   Pour tout $g \in G$ on note C_g l'ensemble des éléments de G qui commutent avec g (centralisateur de g).

2. Soient $a \in G$ et ω sa classe de conjugaison :

   $$\omega = \{gag^{-1}, g \in G\}.$$

   Montrer que C_g est un sous-groupe de G et que son indice est égal au cardinal de ω.

3. Montrer que

   $$n(G) = \frac{1}{|G|^2} \sum_{a \in G} |C_a|.$$

   En déduire que si le nombre de classe de conjugaison dans G ets k alors :

   $$n(G) = \frac{k}{|G|}.$$

   Notont Z le centre de G (élément de G qui commutent avec tout élément de G). Montrer que :

   $$n(G) \leq \frac{1}{2} + \frac{|Z|}{2|G|}$$

4. Montrer que Z est un sous-groupe de G distingué. On suppose que le groupe G/Z est cyclique. En déduire que G est abélien ; quel est donc l'indice de Z ?.

5. montrer que l'indice de Z est au moins 4 et conclure.

VI.PROBABILITÉ D'INTERPRIMALITÉ DE DEUX ENTIERS

On s'intéresse à la probabilité pour que deux entiers pris au hasard dans $\{1, \ldots, n\}$ soient premiers entre eux. Par n on désigne un entier non nul. L'ensemble $\{1, \ldots, n\}^2$ est muni de la probabilité uniforme noté $\mathbf{P}$. On s'intéresse à la probabilité r_n de l'événement

$$A = \{(a, b) \in \{1, \ldots, n\}^2, a \wedge b = 1\}.$$

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Pour $i = 1, \ldots, k$, U_i désigne l'ensemble des couples (a, b) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$ divisibles l'un et l'autre par p_i.

On défini par ailleurs la fonction μ de Möbius, application de $\mathbf{N}^*$ dans $\{0, 1\}$ définie ainsi :

— $\mu(1) = 1$,

— pour tout entier $n \geq 2$ de décomposition en facteur premiers $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, où les α_i, $i = 1 \dots k$ sont non nuls $\mu(n)$ vaut zéro si l'un des α_i est supérieure ou égal à 2 et $\mu_n = (-1)^k$ si tous les α_i sont égaux à 1.

1. Formule du crible de Poincaré —

   (a) Soit U, V et W trois ensembles finis, montrer que :

   $$|U \cup V \cup W| = |U| + |V| + |W| - |U \cap V| - |U \cap W| - |V \cap W| + |U \cap V \cap W|.$$

   (b) Plus généralement, soient $V_1, V_2, \dots, V_k$ des ensembles finis. Montrer que :

   $$\left| \bigcup_{i=1}^{k} V_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\dots,k\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{j \in I} V_j \right|.$$

2. Soit I une partie non vide de $\{1, \dots, k\}$. Montrer que

   $$\left| \bigcap_{i \in I} U_i \right| = \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \right\rfloor^2.$$

3. Montrer que : $r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$.

4. Etude asymptotique de r_n

   (a)

   (b) Montrer que

   $$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (c) Montrer que $r_n \underset{n \to +\infty}{\to} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.

   (d) Montrer que $\left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = 1$. En déduire la limite de r_n.

CORRECTION

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLES, SOLUTIONS PÉRIODIQUES

Toutes les solutions sont définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles.

1. Pour tout entier $n \geq 0$ l'application $a_n \sin(n\,\cdot)$ est bornée et $\|a_n \sin(n\,\cdot)\|_\infty = a_n$. Comme $a_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\sum a_n \sin(n\,\cdot)$ converge normalement ; elle converge *a fortiori* uniformément, et donc sa somme f hérite de la continuité des termes.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

   L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est l'espace vectoriel $\mathrm{vect}(\cos, \sin)$ (oscillateur harmonique).

   Deux cas sont à envisager.

   • $n \geq 2$. On trouve comme solution (complexe) de $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = \mathrm{e}^{int}$, l'application $\frac{1}{1-n^2}\exp(in\cdot)$. Comme l'équation (e_n) est à coefficients réels, elle admet comme solution la partie imaginaire de cette dernière soit :

   $$\frac{1}{1-n^2}\sin(n\,\cdot).$$

   • $n = 1$ On trouve comme solution (complexe) de $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = \mathrm{e}^{int}$, l'application $\frac{\mathrm{id}_{\mathbf{R}}}{2}\exp(\mathrm{i}\cdot)$. Comme l'équation (e_n) est à coefficients réels, elle admet comme solution la partie imaginaire de cette dernière soit :

   $$-\frac{\mathrm{id}}{2}\cos.$$

   Pour $n \geq 2$,

   $$S_n = \{a\cos + b\sin + \frac{1}{1-n^2}\sin(n\,\cdot), (a,b) \in \mathbf{R}^2\}\ ;$$

   $$S_1 = \left\{a\cos + b\sin + \frac{\mathrm{id}_{\mathbf{R}}}{2}\sin, (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$
3. *Il sudffit de penser à généraliser le principe de superposition.*

   Pour tout entier $n \geq 2$, u_n est bornée et $a_n\|u_n\|_\infty = \frac{a_n}{1-n^2} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Donc $\sum\limits_{n\geq 2} a_n u_n$ converge normalement. Notons g sa somme.

   Le théorème de la classe $\mathcal{C}^2$ pour la somme d'une série d'applications, s'applique ici sans mal. Et la vérification par dérivation terme à terme que $g - \frac{\mathrm{id}_{\mathbf{R}}}{2}\cos$ est élément de S est alors instantané...

   $$S = \left\{a\cos + b\sin + g - \frac{\mathrm{id}_{\mathbf{R}}}{2}\cos, (a,b) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

   Soit ψ un élément de S alors $\psi - \psi(2\pi + \cdot) = a_1(2\pi\sin)$. Donc si $a_1 = 0$ alors toute solution est périodique, sinon aucune.
4. Traitons le sens non trivial : on suppose $\phi(2\pi) = \phi(0)$ et $\phi'(2\pi) = \phi'(0)$.

   Posons $\tilde{\phi} = \phi(2\pi + \cdot)$. La périodicité de g veut que $\tilde{\phi}$ soit solution de (2). C'est donc la solution sur $\mathbf{R}$ du problème de Cauchy

   $$\left\{\begin{array}{l}(2),\\ x(0) = \phi(2\pi),\\ x'(0) = \phi'(2\pi),\end{array}\right. \quad \text{soit de} \quad \left\{\begin{array}{l}(2),\\ x(0) = \phi(0),\\ x'(0) = \phi'(0),\end{array}\right.$$

mais ϕ aussi ! Donc $\phi = \tilde{\phi}$, et donc ϕ est 2π périodique

Soit ϕ_0 une solution de (2) Ainsi l'ensemble S_2 des solutions de (2) est-il :

$$S_2 = \{\psi_{a,b}, (a,b) \in \mathbf{R}^2\},$$

où

$$\psi_{a,b} = a\mathrm{ch} + b\mathrm{sh} + \phi_0.$$

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. La solution $\psi_{a,b}$ de (2) est, d'après la première partie de la question, 2π-périodique si et seulement si :

$$\begin{cases} a(\mathrm{ch}(2\pi) - 1) + b\mathrm{sh}(2\pi) = \phi_0(0) - \phi_0(2\pi) \\ a\mathrm{sh}(2\pi) + b(\mathrm{ch}(2\pi) - 1) = \phi_0'(0) - \phi_0'(2\pi) \end{cases}$$

donc si et seulement si (a,b) est solution d'un système de deux équations à deux inconnues dont le déterminant est non nul.

Il existe donc une et une seule solution 2π-périodique de (2).

FONCTION ZÊTA et ZÊTA ALTERNÉE

1. Par le cours sur les séries de Riemann, le domaine de définition de ζ est $]1, +\infty]$.

   Soit $x \in \mathbf{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge ; si $x \leq 0$, alors la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

   Donc le domaine de définition de F est $\mathbf{R}_+^*$.

2. Posons pour tout entier $n \geq 1$,

$$f_n \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R} \, ; \ x \mapsto (-1)^{n-1} \mathrm{e}^{-x \ln n}.$$

   • Pour tout entier $n \geq 1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout réel $x > 1$,$f_n'(x) = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$.

   • L'application F est la limite simple de la série $\sum f_n$.

   • Soit un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}_+^*$ (pour faire plaisir au programme !). Pour tout réel x, l'application

$$g \ :; \mathbf{R}_{+^*} \to \mathbf{R} \, ; \ t \mapsto \ln(t) \frac{1}{t^x}$$

est dérivable de dérivée en $t \in \mathbf{R}_+^*$, $t^{-x-1}(1 - x\ln(t))$. Donc en posant $N_a = \left\lfloor \mathrm{e}^{\frac{1}{a}} \right\rfloor + 1$, alors pour tout $x \in [a,b]$ et tout $t > N_a$, $g'(x) \leq 0$. Donc pour tout réel $x \geq a$, la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum_{n\geq N_a} f_n'(x)$ converge et, pour tout entier $n \geq N_a$, son reste d'ordre n, $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Donc $\sup_{x\in[a,b]} |\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$, segment quelconque de $\mathbf{R}_+^*$.

De ces trois points, d'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout réel $x > 0$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}.$$

3. Pour tout réel $x > 1$,

$$F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x}\zeta(x).$$

On en déduit l'égalité :

$$\forall x \in]1, +\infty[, F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

Comme F est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

$$F(x) = F(1) + (x-1)F'(1) + \mathrm{o}(x-1) = \ln 2 + (x-1)F'(1) + \mathrm{o}(x-1).$$

on a aussi : $1 - 2^{1-x} = 1 - \mathrm{e}^{-(x-1)\ln 2} = (x-1)\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2 + \mathrm{o}((x-1)^2)$

Donc lorsque x tend vers 1^+,

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{F(x)}{1-2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + (x-1)F'(1) + \mathrm{o}(x-1)}{(x-1)\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)} \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2} \frac{\ln 2 + (x-1)F'(1) + \mathrm{o}(x-1)}{1 - \frac{\ln 2}{2}(x-1) + \mathrm{o}(x-1)} \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2} (\ln 2 + (x-1)F'(1) + \mathrm{o}(x-1)) \left(1 + \frac{\ln 2}{2}(x-1) + \mathrm{o}(x-1)\right) \\ &= \frac{1}{(x-1)} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + \mathrm{o}(1). \end{aligned}$$

4.

Pour la valeur de $F(1)$ on étudie la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$ dont la somme vaut sur $]-1, 1[$, $\ln(1+\cdot)$, la convergence uniforme de la série entière sur $[0, 1[$, obtenue par le théorème spécial sur les séries alternées assure par le théorème de la double limite que $F(1) = \ln(1+1) = \ln(2)$.

On peut trouver un équivalent en comparant $\zeta(x)$ à une intégrale, (peut-être trop classique !).

ÉQUATION DE LA CHALEUR SUR $\mathbf{R}_+$

1. Soit $(t, x) \in \mathbf{R}_+^*$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) = \left(\frac{-1}{2t} + \frac{x^2}{2t^2}\right)\phi(t,x)\,; \tag{21}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x) = \left(-\frac{2x}{2t}\right)\phi(t,x)\,; \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t,x) = -\left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{t^2}\right)\phi(t,x). \tag{23}$$

D'où le résultat.

2. (a) *L'application f vérifie (20).*

Soit $(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ Le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre donne

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,y)\cos(y-x)\mathrm{d}y.$$

En effet, on fixe $x_0 \in \mathbf{R}$ et on applique le théorème au programme à

$$t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,y)\cos(y-x_0)\mathrm{d}y$$

on utilise la domination locale de la dérivée partielle en t de l'intégrande sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}_+^*$: pour tout $(t,y) \in [a,b] \times \mathbf{R}_+^*$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\cos(\cdot\ -\ x_0)\right)\right|(t,y) \leq \left(\frac{1}{2a}+\frac{y^2}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\exp\left(-\frac{y^2}{2b}\right).$$

On peut utiliser ce même théorème pour dériver deux fois en x sous le signe intégrale. J'aime autant, puisque ϕ vérifie (20) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(t,y)\cos(y-x)\mathrm{d}y \\
&\underset{\text{I.P.P.}}{=} -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,y)\cos(y-x)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2}\cos(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,y)\cos(y)\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\sin(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,y)\sin(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\cos''(x)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,y)\cos(y)\mathrm{d}y + \frac{\sin''(x)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,y)\sin(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,y)\cos(y-\cdot)\mathrm{d}y\right)(t,x) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t).
\end{aligned}$$

(b) La condition initiale se vérifie de deux manières.

La première (la plus profonde) nécessite de remarquer que $\int_{\mathbf{R}} \phi = 1$ (cf. question suivante). Donnons nous alors $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout réel $t > 0$, par positivité de ϕ :

$$\begin{aligned}
|f(x,t) - \cos(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(x-y) - \cos(x))\phi(t,y)\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |y|\phi(t,y)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} 2\phi(t,y)\mathrm{d}y + \int_{\varepsilon}^{+\infty} 2\phi(t,y)\mathrm{d}y \\
&\leq \varepsilon \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,y)\mathrm{d}y}_{=1} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} 4\phi(t,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Mais par changement de variable affine $u = \frac{y}{\sqrt{2t}}$, on montre que $\int_{\varepsilon}^{+\infty} 2\phi(t,y)\mathrm{d}y$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0. Donc pour t suffisamment petit :

$$|f(t,x) - \cos(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Pour la second méthode on commence par le changement de variable précédent.

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\sqrt{2t}u - x\right)\exp\left(-u^2\right)\mathrm{d}u$$

En prennant une suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui tend vers 0 par valeurs strictement supérieures, on montre que $f(t_n,x) \underset{n\to+\infty}{\to} \cos(x)$, grâce au théorème de convergence dominée, avec pour fonction de domination $u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$. On peut aussi ne pas prendre de suite $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et appliqué la généralisation du théorème de convergence dominée aux familles.

3. Un intégration par parties assure que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $M_{n+1} = \frac{n}{2} M_{n-1}$, une récurrence donne ensuite, pour tout $p \in \mathbf{N}$:

$$M_{2p} = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{(2^p)^2 p!}\ ;\ M_{2p+1} = 0.$$

Soit alors $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. Par parité de $\phi(t,\cdot)$ et le changement de variable devenu habituel :

$$\begin{aligned} f(x,t) =& \cos(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(y)\phi(t,y)\mathrm{d}y \\ =& \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\sqrt{2t}u) \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u \\ =& \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-2t)^p}{(2p)!} u^{2p} \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Donc pour peu que l'on puisse permuter les signes $\int$ et $\sum$,

$$\begin{aligned} f(x,t) =& \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-2t)^p}{(2p)!} M_{2p} \\ =& \cos(x) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^p}{p!} \\ =& \cos(x) \exp\left(-\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Le droit de permuter les signes somme et intégrale provient du théorème au programme dont l'emploi se justifie par la convergence de la série

$$\sum_{p \geq 0} \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(-2t)^p}{(2p)!} u^{2p} \exp\left(-u^2\right) \right| \mathrm{d}u = \sum_{p \geq 0} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^p}{p!},$$

dont la somme vaut $\exp\left(\frac{t}{2}\right)$.

Travaux dirigés n° 18

Dans les deux première parties des développements sont obtenus à partir de relations algébriques sur leurs coefficients, la technique employée erssemble à celle rencontrée lorsque les développement s'obtiennnet à partir d'équations différentielles.

I. Nombres de Catalan

Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de nombres complexes définie par la formule de récurrence

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}\,, n \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer pour tout entier naturel n, la valeur de c_n, on pourra considérer la série entière $\sum c_n t^n$.

II. Développement en série entière d'un inverse.

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie au voisinage de 0 et développable en série entière au voisinage de ce point. On suppose $f(0)$ non nul.

1. Montrer que l'application $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de 0.
2. Montrer que $\frac{1}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

   On pourra se ramener au cas où $f(0) = 1$.

III. Séries entières à coefficients périodiques

p désigne un entier naturel non nul. On considère $\mathcal{I}_p$ l'ensemble des suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, notées a, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+p} = a_n$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{I}_p$ est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

   (b) Soit a un élément de $\mathcal{I}_p$. Déterminer le rayon de convergence de la séries entière de la variable réelle x, $\sum a_n x^n$.

   (c) On note $\mathcal{I}_{p,0}$ l'ensemble des éléments a de $\mathcal{I}_p$ tels que $\sum\limits_{n=0}^{p-1} a_n = 0$. Montrer que $\mathcal{I}_{p,0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{I}_p$ dont on précisera la dimension.

   (d) Soit $a \in \mathcal{I}_{p,0}$ Montrer que la fonction f de la variable réelle x donnée par

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

   est prolongeable à $]-1,1]$ en une application rationnelle.

2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions qui sont développables en série entière sur $]-1,1[$ (qui coïncident avec la somme d'une série entière sur $]-1,1[$).

   On considère, pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$ l'application :

   $$h_k \ :]-1,1[\to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{x^k}{1-x^p}.$$

   (a) Montrer que $h_0, h_1, \ldots h_{p-1}$ sont éléments de $\mathcal{S}$ et donner leur développement en série entière.

(b) On note $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ telles que la suite des coefficients de leur développement en série entière soit élément de $\mathcal{I}_p$.

Montrer que $(h_0, \ldots, h_{p-1})$ est une base de $\mathcal{F}_p$. Montrer que $\mathcal{F}_p$ et $\mathcal{I}_p$ sont isomorphes.

III. Théorème de Bernstein faible

Définition. — *Une application f d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ à valeurs réelles ou complexes est dite analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point x_0 de I, c'est-à-dire s'il existe une série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence ρ non nul et un réel $r \leq \rho$ tels que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$ et pour tout élément x de $]x_0 - r, x_0 + r[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n$.*

Théorèmes de Bernstein (faible) —

Pour une version plus général et une généralisation voir feuilles d'exercices.

Soit h une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $J =]-a, a[$ $(a > 0)$, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $h^{(n)}$ soit positive sur $[0, a[$.

Pour tout entier $N \geq 0$, on note $R_N(x) = h(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

1. Écrire pour tout entier $N \geq 0$, R_N à l'aide d'une intégrale dont les bornes sont 0 et 1.
2. Pour tout couple de réels (x, y) vérifiant $0 < x < y < a$, et tout entier $N \geq 0$, montrer que :

$$0 \leq R_N(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y).$$

3. En déduire que h est somme de sa série de Taylor en 0 sur $[0, a[$.
4. Soit g l'application définie sur $I = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan x$. Montrer que g est développable en série entière.

   Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 de g ?

IV. Une équation diophantienne

Soient r un élément de $\mathbf{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_r)$ un élément de $(\mathbf{N}^*)^r$. Pour tout entier naturel n, on note p_n le nombre de solutions dans $\mathbf{N}^r$ de l'équation d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$,

$$a_1 x_1 + \cdots + a_r x_r = n. \tag{24}$$

1. On suppose dans cette question que $r = 2$. Nous considérerons la série entière de la variable réelle t, $\sum\limits_{n \geq 0} p_n t^n$ (série génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$).

   (a) Rappeler, pour tout élément a de $\mathbf{N}^*$, la décomposition en série entière de $t \mapsto \frac{1}{1 - t^a}$.

   (b) Exprimer la somme de la série génératrice de la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$, sans recourir au signe somme.

   (c) *Application* : Déterminer, pour tout entier naturel n, l'entier $p(n)$ dans le cas où $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

2. Généraliser ce résultat lorsque r est quelconque
3. *Application* : Déterminer, pour tout entier naturel n, $p(n)$ dans le cas où :

$$a_1 = \cdots = a_r = 1.$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ on continue de supposer $a_1 = \cdots = a_r = 1$. Soit $\mathcal{M} := \{\bullet, |\}^{\{1,\ldots,n+r-1\}}$, l'ensemble des mots de $n+r-1$ lettres sur l'alphabet $\{\bullet, |\}$

   Construire une bijection ϕ de l'ensemble des r-uplets d'entiers naturels de somme égale à n sur une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}$. Retrouver l'expression de p_n.

5. *Oral X* . Nous supposerons à présent $a_1, a_2, \ldots, a_r$ premiers entre eux dans leur ensemble. Nous nous proposons de déterminer un équivalent de p_n, lorsque n tend vers $+\infty$. Nous noterons f la somme de la série génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (a) Montrer que la somme de la la série génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est définie sur $]-1,1[$ et est une fonction rationnelles dont on déterminera les pôles. Montrer que les pôles sont d'ordres inférieurs ou égaux à r et que seul 1 est d'ordre r.

   (b) Soit ω un élément de $\mathbf{U}$, montrer que pour tout complexe z tel que $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(\omega - z)^j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\begin{array}{l} n+j-1 \\ n \end{array} \right) \frac{z^n}{\omega^{n+j}}.$$

   (c) En déduire que $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} cn^{r-1}$, où c est un réel à déterminer.

V. Nombres d'Euler-Segner-Goldbach-Dyck-Catalan

La première étude des nombres de Catalan est due à... Euler !

On appelle triangulation d'un polygone convexe plein, tout découpage de ce polygone en triangles pleins dont les intérieurs sont deux à deux disjointes et dont les sommets sont des sommets du polygone. On note pour tout entier $n \geq 3$, T_n le nombre de triangulations d'un polygone convexe plein à n côtés, et l'on convient que $T_2 = 1$.

1. Donner la valeur de T_3, T_4 et T_5.
2. Soit un entier $n \geq 3$ et P_{n+1} un polygone à $n+1$ côtés, de sommets énumérés dans le sens trigonométrique , $S_1, S_2, ...S_{n+1}$. Soit $k \in \{3, ...n\}$. Déterminer le nombre de triangulations de P_{n+1} dans lesquelles apparaît le triangle de sommets S_1, S_2 et S_k.
3. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $c_n = T_n - 2$, ou $(c_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est la suite des nombres de Catalan étudiée en I.

   La solution de ce problème est due à Segner.
4. On appelle mot de Dyck ou bon parenthésage tout mot sur l'alphabet $\{(,)\}$ qui possèdent autant de symboles « (»que de symbole «) », et dont aucun préfixe ne contient plus de «) » que de « (». On note pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, D_n le nombre de mots de Dyck de longueur $2n$ et l'on pose $D_0 = 1$.

   Calculer D_1, D_2, D_3.
5. On appelle escalier de Dyck associé à un mot de Dyck de longueur $2n$ une ligne brisée de $\mathbf{R}^2$ joignant le point $(0,0)$ au point (n,n), constituée de $2n$ segments de longueur 1, dirigés par $(0,1)$ ou par $(1,0)$, le i^e segment étant dirigé par $(1,0)$ si et seulement si le i^e symbole du mot est «) ».

   Combien il y a t'il de lignes brisées joignant le point $(0,0)$ de $\mathbf{R}^2$ au point (n,n), constituée de $2n$ segments de longueur 1, dirigés par $(0,1)$ ou par $(1,0)$?
6. Soit ligne brisée L joignant le point $(0,0)$ de $\mathbf{R}^2$ au point (n,n), constituée de $2n$ segments de longueur 1, dirigés par $(0,1)$ ou par $(1,0)$. Donner une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que L soit un escalier de Dyck.

   On suppose L n'est pas un escalier de Dyck et l'on note D' la droite $\{(x+1, x), x \in \mathbf{R}\}$. Montrer que L rencontre D'.
7. Montrer qu'il y a autant de lignes brisées joignant le point $(0,0)$ de $\mathbf{R}^2$ au point (n,n), constituée de $2n$ segments de longueur 1, dirigés par $(0,1)$ ou par $(1,0)$ qui ne sont pas des escaliers de Dyck, que de de lignes brisées joignant le point $(0,0)$ de $\mathbf{R}^2$ au point $(n+1, n-1)$, constituée de $2n$ segments de longueur 1, dirigés par $(0,1)$ ou par $(1,0)$.

   En déduire une expression de la suite des nombres de Dyck $(D_k)_{k \in N}$, puis en utilisant la valeur de la suite $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ trouvée en I., le lien entre les nombres de Catalan et de Dyck.
8. Chercher, sans utiliser le résultat du I. le lien entre les nombres de Catalan et ceux de Dyck.

Correction de II.

1. L'application f étant développable en série entière au voisinage de 0, il existe un intervalle de la forme $]-c, c[$, où c est un réel strictement positif, tel que la restriction de f à cet intervalle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier f est continue en 0, et comme $f(0)$ est non nul f est du signe de de $f(0)$ dans un voisinage de 0, et donc $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de 0.

2. Puisque une application est développable au voisinage de 0 en série entière, si et seulement si, pour tout réel λ non nul, λf, l'est, quitte à considérer $\frac{f}{f(0)}$, il est loisible de supposer que $f(0) = 1$.

   Par hypothèse on dispose d'une série entière de rayon de convergence R, non nulle $\sum a_n t^n$, d'un élément c de $]0, R]$, tel que pour tout $t \in]-c, c[$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

   Soit $\sum b_n t^n$ une série entière de rayon de convergence R'. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \text{ (série produit).}$$

   Par unicité du développement en série entière de l'application constante égale à 1, La somme de $\sum b_n t^n$ est un développement en série entière de de $\frac{1}{f}$ au voisinage de 0, si et seulement si :

$$\begin{cases} R' > 0, \\ c_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbf{N}^*, c_n = 0. \end{cases}$$

Comme $a_0 = f(0) = 1$, la somme de $\sum b_n t^n$ est un développement en série entière de de $\frac{1}{f}$ au voisinage de 0, si et seulement si :

$$R' > 0, \tag{25}$$

$$b_0 = 1, \tag{26}$$

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k. \tag{27}$$

   Supposons dans la suite que $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit LA suite que définissent les égalité (26) et (27).

   Prenons $r \in]0, R[$. La convergence absolue de la série $\sum a_n r^n$, ou la définition de R comme borne supérieure de $\{\rho \in \mathbf{R}_+, (a_n \rho^n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty\}$, fournit un réel $M > 0$, un réel $r > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

   Alors $|b_0| = 1$, puis successivement :

$$|b_1| \leq \frac{M}{r}, \; |b_2| \leq |a_2||b_0| + |a_1||b_1| \leq \frac{M(1+M)}{r^2}.$$

$$|b_3| \leq |a_3||b_0| + |a_2||b_1| + |a_1||b_2| \leq \frac{M + M^2 + M^2(1+M)+}{r^3} = \frac{M(1+M)^2}{r^3}.$$

Plus généralement une récurrence nous assure que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$|b_n| \leq \frac{M(1+M)^{n-1}}{r^n} \leq \left(\frac{1+M}{r}\right)^n.$$

Comme la série entière $\sum \left(\frac{1+M}{r}\right)^n t^n$ a pour rayon de convergence $\frac{r}{M+1}$, $R' \geq \frac{r}{M+1} > 0$.

Donc $(b_n)_{n\in N}$ satisfait (32), (26) et (27), et donc la somme de la série entière $\sum b_n t^n$ est un développement en série entière au voisinage de 0 de $\frac{1}{f}$.

Correction de III.

1. D'après le cours, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$R_N(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} h^{(N+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Par changement de variable affine :

$$R_N(x) = x^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^N h^{(N+1)}(ux)}{N!} \mathrm{d}u.$$

2. Soient des réels x et y tels que $0 < x < y < a$ et $N \in \mathbf{N}$. La positivité de toute les dérivées de h sur $[0, a[$ assure la croissance de h et de toutes ses dérivées sur $[0, a]$. Donc pour tout $u \in [0, 1]$,

$$0 \leq h^{(N+1)}(ux) \leq h^{(N+1)}(uy).$$

La positivité de l'intégrale donne donc :

$$0 \leq R_N(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y).$$

3. La positivité de toute les dérivées en 0 assure celle de $\sum\limits_{n=0}^{N} \frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$, ce qui nous assure que $R_N(y) \leq h(y)$. Donc :

$$0 \leq R_N(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} h(y).$$

Alors comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} h(y) = 0$, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N(x) = 0$, donc la série de Taylor-MacLaurin de h converge en x de somme $h(x)$, elle converge trivialement en 0 de somme $h(0)$.

Le point x étant quelconque : h est somme de sa série de Taylor sur $[0, a[$.

4. On note pour tout entier naturel n, (H_n) la propriété :
il existe un polynôme P_n de degré $n+1$ à coefficients dans $\mathbf{N}$, tel que $g^{(n)} = P_n(g)$, (avec des notations de probabiliste).
– (H_0) est évidente : il suffit de poser $P_0(X) = X$.
– Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons (H_n) vraie. Alors, $g^{(n+1)} = (1+\tan^2)P_n'(g)$ et donc

$$g^{(n+1)} = P_{n+1}(g),$$

en posant $P_{n+1} = (1+X^2)P_n'$, On a évidement que P_{n+1} est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{N}$, comme produit de tels polynômes, et son degré est celui de X^2P_n' soit $2+(n-1) = n+1$. D'où (H_{n+1}).

Par récurrence (H_m) est donc vraie pour tout entier $m \geq 0$.

La positivité des coefficients de P_n et celle de la fonction tangente sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ entraînent que pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $g^{(n)}(x) \geq 0$. Donc, d'après la question 2, la fonction g est somme de sa série de Taylor sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; et par imparité de g et de la série de Taylor, on a même que g est somme de sa série de Taylor sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

D'après ce qui précède, la série de Taylor de g a un rayon de convergence $R \geq \frac{\pi}{2}$. Si on avait $R > \dfrac{\pi}{2}$, alors la somme S de la série de Taylor de g serait continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et en particulier $S(x)$ aurait une limite finie en $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui est impossible vu que $S(x) = \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On peut donc conclure que $R = \frac{\pi}{2}$.

Travaux dirigés n° 19

Par $\mathbf{K}$ on désigne dans ce TD. indifféremment le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.

I. SOUS-ESPACES STABLES

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note les éléments de $\mathbf{R}^n$ en colonne, et on muni cet espace du produit scalaire canonique.

1. Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Monter que F est stable par A si et seulement si $F^\perp$ est stable par $A^\top$.
2. **Application.** On suppose que
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$
Déterminer les plans stables par A.
3. Soit $A_1, A_2, ...A_p$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ trigonalisables et qui commutent deux à deux. En utilisant la question 1. montrer qu'ils sont cotrigonalisables (c'est-à-dire qu'il existe une base de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle les matrices des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associés aux A_i sont toutes triangulaires supérieures.)

II. ECHAUFFEMENT

Soit A un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.
Montrer que A^{-1} est un polynôme en A : $A^{-1} \in \mathbf{K}[A]$.

III. THÉORÈME DE CAYLAY-HAMILTON

Rappel. Matrice compagnon

Soient un entier $n \geq 2$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des éléments de $\mathbf{K}$ et p le polynôme
$$p = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i.$$
Soit enfin la matrice, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$
On a : $\chi_M = P$.

Nous avons vu dans le TD n°2, partie III. obtenu ce résultat et montré que les espaces propres de la matrice M étaient de dimension 1,avec pour conséquance que une matrice compagnon est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Le calcul du polynôme caractéristique se faisait par une récurrence, pour l'hérédité on peut utiliser un peu tout : développement par rapport à la première ligne, première colonne dernière ligne... un développement par rapport à la dernière colonne (périlleux) donne même directement la solution sans récurrence, de même qu'une combinaison de lignes...

Nous avons retrouver ces résultats dans un exercice de colle en utilisant précisément le théorème de Cayley-Hamilton. Dans ce qui suit nous allons utiliser les matrices compagnons pour prouver ce théorème

Soit u un endomorphisme de $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $\vec{x}$ un élément de $\mathbf{E}$ non nul. Soit $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$ l'ensemble des éléments P de $\mathbf{K}[X]$ tels que $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$.

1. Montrer que $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$ est un idéal de $\mathbf{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$. En déduire l'existence d'un unique polynôme unitaire éléments de $\mathbf{K}[X]$, $\Pi_{\vec{x}}$, tel que $\mathfrak{I}_{\vec{x}} = \Pi_{\vec{x}}\mathbf{K}[X]$.
2. Le polynôme $\Pi_{\vec{x}}$ se décompose dans la base canonique de $\mathbf{K}[X]$ en :

$$\Pi_{\vec{x}} = \sum_{i=0}^{d} b_i X^i,$$

où d est son degré. Notons que $\Pi_{\vec{x}}$ étant unitaire $b_d = 1$.

Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{vec}((u^i(\vec{x}))_{i\in\mathbf{N}})$ est de dimension d, et que la famille $(u^i(\vec{x}))_{i=0;1,\ldots,d-1}$, en est une base. On notera $\mathcal{B}$ cette base de $\mathbf{F}$ dans la suite.
3. Montrer que $\mathbf{F}$ est stable par u. Nous noterons v l'endomorphisme induit par u sur $\mathbf{F}$. Quelle est la matrice M de v dans $\mathcal{B}$?
4. Déterminer le polynôme caractéristique de M. En déduire que $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$ (Théorème de Cayley Hamilton).

IV. DÉCOMPOSITION DE DUNDFORD

Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, non nulle, et soit u un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$. On se propose de montrer que u se décompose, de manière unique, comme la somme d'un endomorphisme diagonalisable d et d'un endomorphisme nilpotent n commutant entre eux.

$$u = d + n,\ d \circ n = n \circ d$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les p valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_p$ et pour $i = 1, 2, ..., p$, $\mathbf{E}_i$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i, $\mathrm{Ker}((u - \lambda_i \mathrm{id}_{\mathbf{E}})^{m_i})$.

On rappel que $\mathbf{E}_i$ est stable par u, pour $i = 1, \ldots, p$ et que :

$$\mathbf{E} = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{E}_i.$$

De plus en notant pour $i = 1, 2, ..., p$, u_i l'endomorphisme induit par u sur $\mathbf{E}_i$ on sait que u_i est la somme d'un endomorphisme diagonalisable d_i et d'un endomorphisme n_i nilpotent, tels que :

$$u_i = d_i + n_i,\ d_i \circ n_i = n_i \circ d_i..$$

1. Montrer l'existence d'un endomorphisme diagonalisable d et d'un endomorphisme nilpotent n tels que :

$$u = d + n,\ d \circ n = n \circ d$$

2. Soient d' un endomorphisme diagonalisable et n' un endomorphisme nilpotent tels que :

$$u = d' + n',\ d' \circ n' = n' \circ d'.$$

Montrer que pour $i = 1, 2, ..., p$, $\mathbf{E}_i$ est stable par d', on note d'_i l'endomorphisme induit par d' sur $\mathbf{E}_i$. Montrer que d'_i est diagonalisable. Que dire des valeurs propres de d'_i ? En déduire que $d_i = d'_i$. Conclure...
3. A quoi pourrait bien servir une telle décomposition ?

V. COMPLÉMENT SUR LA DÉCOMPOSITION DE DUNDFORD

1. — LEMME CHINOIS —

   On reprend les notations du III.

   (a) Montrer qu'il existe un polynôme P élément de $\mathbf{C}[X]$ tel que pour $i = 1, 2, ...p$. le reste de la division de P par $(X - \lambda_i)^{m_i}$ soit λ_i.
   (b) Soit $x \in \mathbf{E}$. Cet élément se décompose dans la somme directe $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \oplus ... \oplus \mathbf{E}_p$ en $x = x_1 + ... + x_p$. Calculer $P(u)(x_i)$, pour $i = 1, 2, ..., p$. En déduire que d est un polynôme en u, puis que n également.

2. — VARIANTE—

   On note pour $i = 1, \dots, p$, $Q_i = \frac{\chi_u}{(X-\lambda_i)^{m_i}}$

   (a) Montrer qu'il existe $U_1, U_2, \dots, U_p$ des éléments de $\mathbf{C}[X]$ tels que

   $$\sum_{i=1}^{p} U_i Q_i = 1.$$

   (b) Pour $i = 1, \dots, p$ on note $P_i = U_i Q_i$ et $p_i = P_i(u)$. Calculer pour i et j éléments distincts de $\{1, \dots, p\}$, $p_i \circ p_j$. Puis $p_i \circ p_i$. En déduire que p_i est un projecteur.
   (c) Pour $i = 1, \dots, p$, montrer que l'image de p_i est $\mathbf{E}_i$.
   (d) Pour $i = 1, \dots, p$, montrer que le noyau de p_i est $\underset{j=1,\dots,p, j\neq i}{\oplus} \mathbf{E}_j$.

   On a ainsi montré que le projecteurs sur l'espace caractéristique $\mathbf{E}_i$ dans la décomposition $\mathbf{E} = \overset{p}{\underset{j=1}{\oplus}} \mathbf{E}_j$ est un polynôme en u.

   (e) Montrer que dans la décomposition de Dundford de u, l'endomorphisme diagonalisable et l'endomorphisme nilpotente sont des polynômes en u.

VI. Polynôme minimal ponctuel

Soient un entier $n \geq 1$, K un corps **infini**, $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel K^n et u un endomorphisme de $\mathbf{E}$. On désigne par μ le polynôme minimal de u.

1. Montrer que tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, l'ensemble $\mathfrak{I}_{\vec{x}}$ des polynômes P, éléments de $K[X]$ tels que $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}$ est un idéal non nul de $K[X]$.
   On notera $\pi_{\vec{x}}$ son générateur unitaire, polynôme communément appelé *polynôme minimal ponctuel en $\vec{x}$*, (sous-entendu de u).

   On se propose de montrer les deux résultats suivants

   Proposition 1. *Il existe un élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$ tel que $\pi_{\vec{a}} = \mu$.*

   Proposition 2. *Dans le cas où $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, l'ensemble A des éléments $\vec{x}$ tel que $\pi_{\vec{x}} = \mu$ est un ouvert dense.*

2. Montrer que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, $\pi_{\vec{x}}$ divise μ_u. En déduire

   $$\mathbf{E} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathbf{F}_i,$$

   où pour $i = 1, ..., p$, $\mathbf{F}_i$ est de la forme $\mathrm{Ker}(\pi_{\vec{x}_i}(f))$, avec $\vec{x}_i$ élément de $\mathbf{E}$.

3. Soient $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, ..., \mathbf{H}_p$ des hyperplans de $\mathbf{E}$. Montrer que la réunion de ces hyperplans n'est pas égale à $\mathbf{E}$:
$$\bigcup_{i=1}^{p} \mathbf{H}_i \neq \mathbf{E}.$$
4. Prouver la proposition 1.

   Dorénavant $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
5. Montrer qu'une union finie d'hyperplans de $\mathbf{E}$ est d'intérieur vide.
6. Montrer la proposition 2.

   Soit A élément de $\mathcal{M}_n(K)$. On appelle commutant de A l'ensemble, noté $\mathcal{C}(A)$, des éléments M de $\mathcal{M}_n(K)$ tels que $AM = MA$.
7. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$ qui contient $K[A]$.
8. Montrer que la dimension de son commutant $\mathcal{C}(A)$ est au moins n.
   Indication : on pourra par exemple étudier la dimension de $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{T}_n^+(C)$.
9. Montrer que si $\mathcal{C}(A) = K[A]$ alors $\chi_A = \mu_A$.
10. Que dire de la réciproque.

VII. THÉORÈME DE BURNSIDE Théorème de Burnside —

Dans cet exercice $\mathbf{K}$ désignera un sous corps de $\mathbf{C}$ et n un entier supérieur ou égal à 1. La première question est consacré à des résultats techniques utilisés dans la suite.

1. Préliminaires
   (a) Soient $A_1, A_2, ..., A_p$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tous diagonalisables. On supose que $A_1, A_2, ..., A_p$ commutent entre eux. Montrer qu'il existe un élément P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que pour $i = 1, 2, ...p$, la matrice PA_iP^{-1} soit diagonale.
   (b) Soient $a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de $\mathbf{K}$ et
$$V(a_1, a_2, ..., a_n) := \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$
   Montrer que
$$V(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$
   (c) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose que pour tout entier $k \geq 1$, $\mathrm{Tr}(M^k) = 0$. Montrer que M est la matrice est nilpotente.

   Dans la suite G désigne un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

2. (a) On suppose que G est d'ordre fini (de cardinal fini). Montrer qu'il existe un enier naturel N non nul tel que pour tout élément A de G, $A^N = I_n$.
   (b) On suppose dans cette sous question (et seulement dans cette sous-question) que G est abélien (commutatif). Montrer qu'il existe un élément P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que pour matrice A élément de G, PAP^{-1} soit diagonale.

3. On se propose de montrer la réciproque du 2.(a), ce qui constitue le théorème de Burnside. On suppose donc qu'il existe un enier naturel N non nul tel que pour tout élément A de G, $A^N = I_n$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ engendré par G, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients complexes d'élément de G. On se donne $(M_1, ...M_m)$ une base de $\mathbf{F}$, *constituée d'éléments de* G et l'application

$$f \;:\; G \to \mathbf{C}^m\,;\; A \mapsto (\mathrm{Tr}(AM_1), ..., \mathrm{Tr}(AM_m))$$

   (a) Soient A et B des éléments de G tels que $f(A) = f(B)$. Montrer que pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,
$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM).$$

   (b) On pose $D = AB^{-1}$. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $(\mathrm{Tr}D^k) = n$.

   (c) Calculer pour tout entier $k \geq 1$, $(\mathrm{Tr}(D - I_n)^k)$. En déduire que $(D - I_n)$ est nilpotente.

   (d) Montrer que f est injective.

   (e) Montrer que G est fini. On remarquera que le spectre complexe d'un élément de G est inclus dans $\mathbf{U}_N$ groupe des racines N^{e} de l'unité.

Travaux dirigés n° 20

I. Transformée de Laplace

On se propose d'étudier la transformée de Laplace d'une application sous des hypothèses plus faibles que celles des exercices du cours.

Soit f une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe un réel p_0 tel que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-p_0 x)\mathrm{d}x$$

converge.

1. Montre que pour tout réel $p > p_0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\exp(-p)\mathrm{d}x$ converge.

   On dispose donc de l'application

   $$\mathcal{L}(f) \ : \ [p_0, +\infty[\to \mathbf{R}\,;\ p \mapsto \int_0^{+\infty} f(x)\exp(-px)\mathrm{d}x,$$

   (transformée de Laplace de f.)
2. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue en p_0.
3. Application. On prend pour f l'application

   $$\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{pour } x > 0, \\ 1, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que la restriction de $\mathcal{L}(f)$ à $\mathbf{R}_+^*$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner l'expression de sa dérivée sans recourir au signe intégrale.

   (b) Donner la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

   .
4. On se propose de retrouver de manière différente la valeur de l'intégrale de Dirichlet. En considérant considère les suites $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par : $\forall n \in \mathbf{N}\,;\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\mathrm{d}x,\ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$

   (a) Vérifier que ces deux suites sont bien définies.

   (b) montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et donner la valeur de cette constante.

   (c) Montrer que la suite $(I_n - J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

   (d) Conclure.

II. Transformée de Fourier d'une gaussienne —

1. intégrale d'une gaussienne —

   Soient F et G les fonctions de la variable réel x définie par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que G est définie sur $\mathbf{R}$ paire, de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et calculer $G(0)$.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $G'(x) = -2F'(x)F(x)$.

(c) En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

2. Soit f un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$, telle que pour tout entier naturel n, $|x^n f(x)| \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$. Montrer que pour tout réel k, est définie la quantité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i2\pi kt)\,\mathrm{d}t.$$

Nous noterons cette quantité $\hat{f}(k)$, l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui à un réel k associe $\hat{f}(k)$, est appelée *transformée de Fourier de* f.

3. Montrer que la transformée de Fourier de f est une application indéfiniment dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, et donner l'expression de $\hat{f}^{(n)}$, pour tout entier naturel n.

4. On se propose de déterminer $\hat{f}$, lorsque f est l'application

$$f_\sigma \;:\; \mathbf{R}\to\mathbf{C}\;;\; x\mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right),$$

où σ est un réel strictement positif (gaussienne).

(a) Montrer que $\hat{f_\sigma}$ est solution sur $\mathbf{R}$ d'une équation linéaire du premier ordre à déterminer.

(b) En déduire que $\hat{f_\sigma}$ est une gaussienne que l'on déterminera, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif Σ, et un réel $c>0$ tels que :

$$\hat{f_\sigma} = c f_{\sigma'}.$$

5. On va donner une autre méthode de calcul de $\hat{f_\sigma}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel p, la fonction $x\mapsto x^{2p}\exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On note $M_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x.$

(b) Pour p entier naturel, donner une relation entre M_{p+1} et M_p et en déduire que, pour tout $p\in\mathbf{N}$,

$$M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$$

(c) Montrer que, pour tout réel ξ, il existe une suite réelle $(c_p(\xi))_{p\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall x\in\mathbf{R},\qquad \exp(-x^2)\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\exp(-x^2)x^{2p}$$

(d) En déduire que, pour tout réel ξ, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)\exp(-i\,2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\left(-\pi^2\xi^2\right)$.

(e) On pose $\sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sigma}$. Montrer qu'il existe un réel μ tel que $(\hat{f_\sigma}) = \mu f_{\sigma'}$.

IV. Complément pour $\frac{5}{2}$: Transformée de Fourier et échantillonage.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ indéfiniment dérivables et telles que pour tout m et tout n, entiers naturels, $x^n f^{(m)}(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel, fait évident que l'on ne demande pas de vérifier.

Pour toute application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, nous noterons $\check{f}$, l'application $\mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ x \mapsto f(-x)$

1– Soit $f \in \mathcal{S}$. Montrer que pour tout réel p, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto f(x)\exp(-i2\pi px)$ est intégrable.

On note dans la suite pour tout réel p, $\hat{f}(p)$ la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i2\pi px)\mathrm{d}x$ et l'application

$$\hat{f}\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ p \mapsto \hat{f}(p)$$

s'appelle transformée de Fourier de f. Cette transformation a été introduite par Fourier dans l'étude de la propagation de la chaleur dans une barre de longueur infinie.

2– Montrer que $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ [14]. On précisera en particulier l'expression de $(\hat{f})^{(n)}$ pour tout entier naturel n.

3– Formule d'inversion pour une application $\mathcal{C}^\infty$ à support inclus dans un segment

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et nulle en dehors d'un segment [15] de la forme $[-A, A]$, $A \in \mathbf{R}_+^*$; f est donc en particulier élément de $\mathcal{S}$.

Pour tout élément T de $\mathbf{R}_+^*$ on considère l'application

$$F_T\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+kT),$$

(la somme définissant $F_T(x)$ ne contient en fait pour tout x, qu'un nombre fini de termes non nuls.)

a) Montrer que pour tout réel $T > 0$, F_T est T-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Déterminer pour tout entier q le coefficient de Fourier (voir TD. 12) c_q de F_T d'ordre q, au moyen de la transformée de Fourier de f.

c) Montrer en utilisant le TD 12. que pour tout réel x,

$$F_T(x) = \frac{1}{T}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{q}{T}\right)\exp\left(i\frac{q2\pi x}{T}\right).$$

d) Soit B un réel strictement positif. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\frac{B}{n}\sum_{q=-n}^{n-1} \hat{f}\left(q\frac{B}{n}\right)\exp\left(i\frac{q2\pi Bx}{n}\right).$$

admet une limite à préciser.

e) Déduire de la précédente question la formule dite d'*inversion de Fourier*,

$$\hat{\hat{f}} = \check{f}$$

4– Règle d'échantillonage de Shanonn

Soit f un élément de $\mathcal{S}$, on note g sa transformée de Fourier. On suppose que g est nulle en dehors d'un segment de la forme $[-F, F]$, avec $F \in \mathbf{R}_+^*$, on dit que le spectre de f est à bande passante de fréquence F. Etant donné par ailleurs un réel $F_e > 0$ on pose pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f_n = f\left(\frac{n}{F_e}\right)$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est appelé d'échantillonage de f à la fréquence F_e.

14. Il s'agit en fait d'un isomorphisme, mais nous ne démontrerons pas ce fait.
15. On admet pour le moment l'existence de telles applications

Nous nous proposons de montrer que si $F_e \geq 2F$, f est alors entièrement déterminée par son échantillonage.

a) Montrer qu'il existe bien une telle application f.

b) On note en accord avec 3–, $G_{F_e} := \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} g(kF_e + \cdot)$. Montrer que

$$G_{F_e} = \frac{1}{F_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{-n} \exp\left(\frac{in2\pi}{F_e} \cdot\right).$$

c) On suppose jusqu'à la fin que $F_e \geq 2F$. Et l'on note χ l'application caractéristique définie sur $\mathbf{R}$ de $\left[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}\right]$. Montrer que $\chi G_{F_e} = g$.

d) Calculer la transformée de Fourier de χ. En déduire que pour tout réel x,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \frac{\sin\left(\left(\frac{n}{F_e} - x\right)\pi F_e\right)}{\left(\frac{n}{F_e} - x\right)\pi F_e}.$$

Ainsi f est-elle entièrement déterminer pas son échantillonage. Dans la pratique on transforme les signaux réels en signaux à bande passante de fréquence F, par l'utilisation d'un filtre analogique, on peut ensuite échantilloner à une fréquence au moins égale au double de F.

5–

a) Soit φ une application continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbf{C}$ telle que pour tout entier n, $\int_a^b \varphi(t)t^n \mathrm{d}t = 0$. Montrer que φ est nulle.

b) Soit f un élément de $\mathcal{S}$. En particulier pour tout entier n, $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable. On suppose que pour tout entier n, $\int_a^b f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$.

A-t-on nécessairement f nulle ?

6– Existence d'applications indéfiniment dérivables à support inclus dans un segment

a) Soit l'application

$$g \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,; \ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$.

b) Soit $[a, b]$ un segement non réduit à un point. Montrer qu'il existe une application h de classe $\mathcal{C}^\infty$, nulle en dehors du segment $[a, b]$.

V Complément pour $\frac{5}{2}$: Transformée de Fourier, principe d'incertitude

Nous allons étudier différents aspects de la transformée de Fourier.

1. — Transformée de Fourier, premières propriétés —
   (a) Pour tout application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ continue par morceaux intégrable montrer que pour tout réel k, la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i2\pi kt)\mathrm{d}t$ est bien définie. On dispose donc de l'application
   $$\hat{f}\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{C}\,;\ k\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-i2\pi kt)\mathrm{d}t$$
   appellée transformée de Fourier de l'application f.
   (b) Soit a un réel strictement positif. Calculer la transformée de Fourier f dans les deux cas suivants :
   (a) $f=\chi_{[-a,a]}$ (fonction caractéristique de $[-a,a]$).
   (b) $f\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{C}\,;\ x\mapsto\exp(-a|x|)$.
2. Montrer que pour tout application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ continue par morceaux intégrable, l'application $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Soient f_1 et f_2 des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ continues par morceaux intégrables. Montrer que $f_1\hat{f}_2$ et $f_2\hat{f}_1$ sont intégrables et que :
   $$\int_{\mathbf{R}} f_1\hat{f}_2=\int_{\mathbf{R}} f_2\hat{f}_1.$$
4. — Formule d'inversion —

   Nous nous proposons d'établir le résultat suivant (formule d'inversion de Fourier) :
   Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ continue et intégrable. On suppose de surcroît que $\hat{f}$ est intégrable. Alors pour tout réel t,
   $$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)\exp(i2\pi tk)\mathrm{d}k. \tag{28}$$
   Autrement dit $\hat{\hat{f}}=\check{f}$. [16]

   Interprétons la transformée de Fourier en terme de signal. La formule (28) nous dit qu'un signal f se décompose en une somme continue de signaux sinusoïdaux $\exp(i2\pi k\cdot)$ de fréquence k, la part du signal $\exp(i2\pi k\cdot)$ dans f est $\hat{f}(k)$. La transformée de Fourier s'appelle pour cette raison spectre de f.

   Dans la suite f est une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ *continue* et intégrable.

   (a) Pour tout entier $n\geq 1$ on considère l'application
   $$g_n\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{C}\,;\ t\mapsto\exp\left(-\frac{2\pi}{n}|t|\right).$$
   Vérifier que $\hat{g}_n$ est continue intégrable et pour tout réel t, montrer que :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)g_n(k)\exp(i2\pi tk)\mathrm{d}k=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\hat{g}_n(u-t)\mathrm{d}u.$$

16. Pour une application g de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, $\check{g}$ désigne l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui à un réel x associe $g(-x)$.

(b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}_n(k)\mathrm{d}k = 1$.

(c) Montrer que pour tout réel t,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\hat{g}_n(u-t)\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\to} f(t).$$

(d) Etudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)g_n(k)\exp(i2\pi tk)\mathrm{d}k$ et en déduire la formule (28).

On verra dans le cadre des séries de Fourier une autre preuve de cette formule.

5. — La classe de Schwartz —

(a) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ indéfiniment dérivables et telles que pour tout couple (i,j) d'entiers naturels

$$x^i f^{(j)}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0.$$

On admettra, ce qui est presque évident, que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ stable par dérivation et par multiplication par un polynôme.

(b) Donner des exemples d'éléments de $\mathcal{S}$.

(c) Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{S}$ et pour tout couple (i,j) d'entiers naturels $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $x^i f^{(j)}(x)$ est intégrable.

(d) Soit f un élément de $\mathcal{S}$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et préciser sa dériver.

(e) Soit f un élément de $\mathcal{S}$. Montrer que pour tout réel k et tout entier naturel j, $\widehat{f^{(j)}}(k) = (i2\pi k)^j \hat{f}(k)$.

(f) Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par transformation de Fourier. Dans la suite on note $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ l'application de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ qui à une application f associe sa transformée de Fourier.

(g) Montrer que $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ est une bijection de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

(h) On admet qu'il existe une applications ϕ de $\mathbf{R}_+$, nulle en dehors du segment $[-1,1]$, indéfiniment dérivable. Montrer qu'il existe une application *non nulle* f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ tel que pour tout entier naturel i, $x\mapsto x^i f(x)$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$ d'intégrale nulle.

(i) *Un résultat de régularisation*
Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, continue et nulle en dehors d'un compact. Pour tout élément n de $\mathbf{N}$, on pose : $\rho_n = na\phi(n\cdot)$, où $a = \left(\int_\mathbf{R}\phi\right)^{-1}$ et

$$\rho_n * f \;:\; x\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\rho_n(x-t)\mathrm{d}t.$$

Montrer qu'il existe un segment J tel que pour tout $n\in\mathbf{N}$, l'application $\rho_n * f$ est nulle sur le complémentaire de J. Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, l'application $\rho_n * f$ est indéfiniment dérivable. Montrer que la suite d'application $(\rho_n * f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur J vers f.

6. — Principe d'incertitude —

On se propose démontrer le résultat suivant :

Soit f un élément de $\mathcal{S}$. On pose :

$$\sigma_f = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \;;$$

$$\sigma_{\hat{f}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2|\hat{f}(k)|^2 \mathrm{d}k\right)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t ;$$

$$\Delta t = \frac{\sigma_f}{E_f^{\frac{1}{2}}} ;$$

$$\Delta k = \frac{\sigma_{\hat{f}}}{E_f^{\frac{1}{2}}}.$$

On a alors le résultat suivant, connu sous le nom de principe d'incertitude :

$$\Delta t \Delta k \geq \frac{1}{4\pi} \tag{29}$$

Interprétons ce résultat. En terme de signal E_f mesure l'énergie du signal, σ_f^2 la dispersion du signal en temps. Plus cette quantité est grande plus le signal est temporellement étalé. La quantité $\sigma_{\hat{f}}^2$ mesure la dispersion du signal en fréquence, le principe d'incertitude dit qu'on ne peut localiser un signal d'énergie donnée finement à la fois en temps et en fréquence.

D'un point de vue probabiliste, $\frac{|f|^2}{E_f}$ et $\frac{|\hat{f}|^2}{E_f}$ sont des densités de probabilité (on verra que $E_f = E_{\hat{f}}$ et σ_f est l'écart type de la variable aléatoire x pour la probabilité associé à la première densité, $\sigma_{\hat{f}}$ et l'écart type de la variable aléatoire k pour la probabilité associé à la seconde densité. C'est le point de vue probabiliste qui conduit au principe d'incertitude d'Heisenberg dans le cadre de la mécanique quantique.

(a) Soient f et g des éléments de $\mathcal{S}$. Montrer que les deux égalités suivantes, connues sous le nom d'égalités de *Parseval-Plancherel*,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\hat{f}}(k)\hat{g}(k)\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}|^2(k)\mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2(t)\mathrm{d}t, .$$

(b) Montrer que :

$$\sigma_{\hat{f}}^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} t(f\bar{f})'(t)\mathrm{d}t\right| \leq 4\pi\sigma_f\sigma_{\hat{f}}.$$

(d) En déduire que $\sigma_f\sigma_{\hat{f}} \geq \frac{E_f}{4\pi}$ et conclure.

(e) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité dans (29).

Travaux dirigés n° 21

I. Crystalographie

Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une famille liée de vecteurs deux à deux distincts, unitaires d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ de dimension $n \geq 2$. On suppose de plus qu'il existe un réel α tel que pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, ...n\}$,

$$\langle\vec{e}_i|\vec{e}_j\rangle = \alpha.$$

1. Calculer α.
2. Calculer $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + ... = \vec{e}_n$.
3. Quel est le rang de la famille $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.
4. Déterminer dans une molécule de méthane entre deux liaison C-H.

II. Suite (pour 5/2)

Soient un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ de dimension n non nulle et $(\vec{x}_1, ...\vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbf{E}$

Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une base orthonormée de $\mathbf{E}$, notée $\mathcal{B}$. Pour tout i et tout j éléments de $[\![1, n]\!]$ on note $a_{i,j}$ la i^{e} coordonnée de x_j dans $\mathcal{B}$ et l'on pose

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,n}} \quad \text{et} \quad G = A^{\mathrm{T}} A.$$

1. Exprimer la matrice G au moyen de produits scalaires. On appelle G matrice de Gramm de la famille $(\vec{x}_1, ...\vec{x}_n)$.
2. Montrer que G est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la famille $(\vec{x}_1, ...\vec{x}_n)$ pour que les valeurs propres soient strictement positives.
3. On se propose de montrer qu'il existe $n+1$ vecteurs $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_{n+1}$ de $\mathbf{E}$ tels que pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, on ait :

$$\|\vec{y}_i - \vec{y}_j\| = 1. \tag{30}$$

   (a) Soient $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_{n+1}$ des vecteurs de $\mathbf{E}$. On pose pour $i = 1, 2, ..., n$, $x_1 = \vec{y}_1 - \vec{y}_{n+1}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la matrice de Gramm G de la famille $(\vec{x}_1, ...\vec{x}_n)$, pour que $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_{n+1}$ vérifient (30) .

   (b) Dans le cas où G vérifie cette condition, montrer que G est ortho-diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

   (c) Conclure.

   (d) Montrer de nouveau le résultat en raisonant par récurrence sur la dimension n de $\mathbf{E}$.

III. Polynôme orthogonaux

Voir feuilles d'exercices.

IV Ellipsoïde de John-Loewner (pour 5/2)

Nous nous proposons de montrer que pour tout sous-groupe compact G de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, existe un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ tel que G soit un sous-groupe du groupe orthogonal associé à ce produit scalaire. Ce résultat spectaculaire est simple à prouver dans le cas où G est fini (cf. exercice 13)

Pour le cas général nous nous servirons d'un résultat de Loewner-Behrend qui affirme que tout compact de $\mathbf{R}^n$ est inclus dans un ellipsoïde de volume minimal.

Dans la suite n désigne un entier supérieur ou égal à 1, les n-uplets de réels sont notés en colonne, le n-uplet nul sera noté $\mathbf{0}$. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structrure euclidienne canonique, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On désigne par B_n la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$: $B_n = \{X \in \mathbf{R}^n | \|X\| \leq 1\}$. enfin $\mathcal{Q}^{++}$ (resp. $\mathcal{Q}^{+}$) désignera l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbf{R}^n$ définies positives (esp. positives).

1– Soit q une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$, définie positive, on note $E_q = \{X \in \mathbf{R}^n | q(X) \leq 1\}$.Pour $n = 2$ E_q est une ellipse pleine de centre l'origine, pour $n = 3$, E_q est un ellipsoïde plein de centre $\mathbf{0}$, nous conseverons la terminologie dans le cas général, E_q s'appellera ellipsoïde associé à q.

a Soient q et q' des forme quadratiques sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que :
  — si $E_q \subset E'_q$ alors $q' \leq q$;
  — Si $E_q = E'_q$ alors $q' = q$.

b) Montrer que toutes les matrices de q dans des bases orthonormées ont même déterminant. La valeur commune de ces déterminants sera dans la suite notée $\delta(q)$.

c) Montrer que dans le cas $n = 2$ l'aire de l'ellipse E_q vaut $\frac{|B_2|}{\sqrt{\delta(q)}}$

Plus généralement, on montre après avoir défini une notion de volume dans $\mathbf{R}^n$ que le volume de E_q est le produit du volume de B_n par $\frac{1}{\sqrt{\delta(q)}}$. On pose $V(q) = \frac{1}{\sqrt{\delta(q)}}$.

2–

Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$ d'intérieur non vide. On se propose de montrer qu'il existe un et un seul élément q_0 de $\mathcal{Q}^{++}$ tel que $V(q_0) = \min\{V(q), |q \in \mathcal{Q}^{++} \text{ et } K \subset E_q\}$, dit de manière plus géométrique, qu'il existe un unique ellipsoïde plein de centre l'origine, contenant K de volume minimal.

a) Soient q une forme quadratique sur $\mathbf{R}^n$ et S sa matrice dans la base canonique. Montrer que $q \in \mathcal{Q}^{++}$ si et seulement si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

b) Soit $q_0 \in \mathcal{Q}^{++}$ de matrice S_0 dans la base canonique.
Montrer que $V(q_0) = \min\{V(q), |q \in \mathcal{Q}^{++} \text{ et } K \subset E_q\}$ si et seulement si :

$$\det S_0 = \max\{\det S, S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ et } \forall X \in K, {}^{\mathrm{t}}XSX \leq 1\}.$$

c) On définit l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \left\{S \in \mathcal{S}_N^{+}(\mathbf{R}) \mid \forall X \in K,\ {}^{t}XSX \leq 1\right\}.$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est un ensemble fermé de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(\mathbf{R})$. On pourra munir $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(\mathbf{R})$ de la norme subordonnée à la norme 2 de $\mathbf{R}^n$.

c) Montrer que $\mathcal{C}$ est borné. On poura utiliser que K est d'intérieur non vide.

d) Montrer que $\mathcal{C}$ est un compact non vide. En déduire qu'il existe un élément S_0 de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que :

$$\det S_0 = \max\{\det S, S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ et } \forall X \in K, {}^{\mathrm{t}}XSX \leq 1\}.$$

3 — UNICITÉ —

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un **ensemble convexe**.

b) Soient S_1 et S_2 des élément de $\mathcal{S}_n^{++}$ telles que :

$$\det S_i = \max\{\det S, S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ et } \forall X \in K, {}^{\mathrm{t}}XSX \leq 1\},$$

pour $i = 1, 2$. Montrer que

$$\det\left(\frac{S_1 + S_2}{2}\right) > \det(S_1)^{\frac{1}{2}}\det(S_2)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Conclure à l'existence d'un unique ellipsoïde plein de centre l'origine, contenant K de volume minimal. On l'appelle ellipsoïde de JOHN.

4– Soit φ une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$ non dégénérée. On note O_φ l'ensemble des éléments u de $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ qui conservent φ, c'est-à-dire tels que, pour tout X et tout Y éléments de $\mathbf{R}^n$, $\langle u(X)|u(Y)\rangle = \langle X|Y\rangle$.

a) Montrer que O_φ est un groupe.

b) On suppose dans cette sous question que φ est un produit scalaire ; O_φ est alors le groupe orthogonal de $(\mathbf{R}^n, \varphi)$. Montrer que O_φ est compact.

c) Dans le cas général a-t-ton O_φ compact ?

5– On se propose d'établir une réciproque faible de 4–b) :

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ compact. Alors il existe un produit scalaire φ sur $\mathbf{R}^n$ tel que G soit un sous-groupe de O_φ, groupe orthogonal de $(\mathbf{R}^n, \varphi)$.

a) Soit H un compact d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^n$. On pose $K := \overline{G(H)}$. montrer que K est un compact d'intérieur non vide. Donc d'après 3–, on peut considérer $q \in \mathcal{Q}^{++}$ tel que E_q soit l'éllipsoïde de John associé à K. On notera φ la forme polaire de q.

Soit g élément de G.

b) Montrer que $|\det(g)| = 1$.

c) Montrer que $K \subset g(E_q)$.

d) Montrer qu'il existe un élément q' de $\mathcal{Q}^{++}$ à déterminer tel que $g(E_q) = E_{q'}$.

e) Conclure.

Travaux dirigés n°22

I. PRÉAMBULE

L'équation différentielle $x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x$ admet-elle des solutions développables en série entière au voisinage de 0 ? des solutions définies [17] sur $\mathbf{R}$?

I. ÉQUATION DE BESSEL

On se propose d'étudier l'équation différentielle linéaire suivante dite de Bessel :

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - \lambda^2) y = 0, \tag{31}$$

où λ est un élément de $\mathbf{R}_+^*$.

Cette équation intervient dans de nombreux problèmes notamment dans l'étude de l'équation de Laplace lorsque l'on « sépare » les variables en cordonnées cylindriques.

1. Par $\sum a_n t^n$ on désigne une série entière de rayon de convergence R, de coefficient de degré 0 non nul. Soit r un réel.

   On suppose que R est non nul et que l'application [18] $\varphi\ :]0, R[\to \mathbf{R}\,;\ t \to t^r \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. est solution de(31). Montrer que nécessairement r vaut λ ou $-\lambda$.
2. On prend $r = \lambda$, $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Montrer qu'il existe un et un seul choix de la série entière $\sum a_n t^n$ pour lequelle l'application φ est solution de (31) sur $]0, R[$. On donnera les valeurs de a_n, pour tout entier naturel n, ainsi que la valeur de R.

   On notera par la suite φ_λ cette solution.
3. On suppose dans cette question que λ n'est pas élément de $\mathbf{N}$. On prend $r = -\lambda$, $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Montrer qu'il existe un et un seul choix de la série entière $\sum a_n t^n$ pour lequelle l'application φ est solution de (31) sur $]0, R[$. On donnera les valeurs de a_n, pour tout entier naturel n, ainsi que la valeur de R.

   On notera par la suite $\varphi_{-\lambda}$ cette solution.
4. On suppose que λ n'est pas un entier. Déterminer au voisinage de 0 un équivalent de φ_λ et $\varphi_{-\lambda}$. Donner la forme générale des solutions de l'équation (31) définies sur $\mathbf{R}_+^*$
5. Montrer que pour tout λ entier, il n'existe pas de solution du type précédent avec $r = -\lambda$ et $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.
6. Montrer que pour tout réel $t > 0$,$\varphi_{\frac{1}{2}}\ (t)\ = \left(A/\sqrt{t}\right) \sin t$ où A est une constante que l'on déterminera. Donner une expression analogue pour $\varphi_{-\frac{1}{2}}$.
7. Soit λ un entier naturel non nul, on pose suivant l'usage : $J_\lambda\,(t) = \left(\frac{2^{-\lambda}}{\lambda!}\right)\ \varphi_\lambda\,(t)$. Montrer que : $J_\lambda\,(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right) \int\limits_0^\pi \cos\ (\lambda\, u - t\ \sin u)\, \mathrm{d}\, u$.

---

17. Les 5/2 pourrons dans un second temps se demander si l'équation admet des solutions sur $\mathbf{R}$ indéfiniment dérivables.
18. Cette démarche s'appelle la méthode de Frobenius, plus générale que la recherche de solutions développables en série entière elle permet notamment de trouver des solutions non régulières au voisinage de 0, ce qui *a priori* est ici le cas puisque le coefficient de y'' dans (31) s'annule en 0.

II. STURMERIERS

1. Soient r et s deux applications à valeurs réelles définies sur un intervalle I d'intérieur non vide, continues. On suppose que pour tout élément t de I, $s(t) \geq r(t)$. On considère les équations :

$$x'' + r\,(t)\,x = 0. \tag{32}$$

$$x'' + s\,(t)\,x = 0. \tag{33}$$

   Soit f une solution non nulle de (32) sur I et g une solution non nulle de (33) sur I. On suppose que pour tout élément t de I, $s(t) \geq r(t)$.

2. Montrer que les zéros de de f et g sont isolés, c'est-à-dire que tout zéro z de f (resp. g) admet un voisinage qui ne contient pas d'autres zéros de f (resp. g) que z.

3. Soient t_1 et t_2 deux zéros consécutifs de f. Prouver que si f et g ne sont pas proportionnelles sur $]t_1, t_2[$, alors g admet un zéro dans $]t_1, t_2[$.

   Indication : on pourra considérer l'application $w = fg' - f'g$ En représenter les orbites des équations différentielles (32) et (33),

$$\begin{cases} x = f\,(t)\,, \\ y = f'\,(t)\,, \end{cases} \text{et} \begin{cases} x = g\,(t)\,, \\ y = g'\,(t)\,, \end{cases}$$

   interpréter géométriquement w et justifier l'idée de son emploi.

4. Supposons que pour tout $t \in I,\ r\,(t) \leq 0$ Prouver que toute solution non nulle de (32) a au plus un zéro dans I.

5. On suppose qu'il existe un réel μ strictement positif tel que pour tout $t \in I,\ r\,(t) < \mu^2$. Par t_1 et t_2 on désigne deux zéros consécutifs dans cet ordre, d'une solution non nulle de (32) Prouver que :

$$t_2 \geq t_1 + \frac{\pi}{\mu}.$$

6. Soit (f, g) une base de solutions sur I de l'équation différentielle homogène :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{34}$$

   où p et q sont des applications de I dans $\mathbf{R}$ continues.

   (a) Montrer que $w : I \to \mathbf{R}\,; t \mapsto\ f'\,(t)\,g\,(t) - f\,(t)\,g'\,(t)$ garde un signe constant.

   (b) Montrer que les zéros de f sont isolés.

   (c) Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a exactement un zéro de g.

   (d) En représentant les orbites de (34),

$$\begin{cases} x = f\,(t)\,, \\ y = f'\,(t)\,, \end{cases} \text{et} \begin{cases} x = g\,(t)\,, \\ y = g'\,(t)\,, \end{cases},$$

   interpréter géométriquement w et justifier l'idée de son emploi.

III. GRONWALLERIES

1. — Lemme de Gronwall —

   Soient u et v des applications continues de $[t_0, t_0+T]$ dans $\mathbf{R}$ à valeurs *positive* et C un réels tels que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$,
$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\mathrm{d}s.$$
   Montrer que pour tout $t \in [t_0, t_0+T]$,
$$u(t) \leq C\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\mathrm{d}(s)\right).$$

2. Soit l'équation différentielle
$$x'' + q\,(t)\,x = 0, \tag{35}$$
   où q est une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} s|q(s)|\mathrm{d}s$ converge.

   Soit ϕ une solution sur $\mathbf{R}_+$ de (35).

   (a) Montrer que $t \mapsto \frac{\phi(t)}{t}$ est bornée sur $[1, +\infty]$.

   (b) Montrer que ϕ' a une limite en $+\infty$.

   On suppose que $q \geq 0$. On se propose de montrer que ϕ admet un nombre fini de zéros strictement majoré par $1 + \int_0^{+\infty} tq(t)\mathrm{d}t$.

   (c) Soient α et β des zéros de ϕ consécutifs. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, montrer que
$$|\phi'(\alpha)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} q(s)|\phi(s)|\mathrm{d}s.$$
   (d) En étudiant la convexité de ϕ sur $[\alpha, \beta]$, montrer que
$$1 \leq \int_{\alpha}^{\beta} s|q(s)|\mathrm{d}s$$
   et conclure.

   (e) Le résultat demeure-t-il si q n'est plus supposé positif ?

3. Soit ϕ une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ telle que
$$\phi + \phi' + \phi'' + \phi^2 = 0.$$
   On suppose que $\phi(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(t^{-1})$. Montrer que pour tout entier k, $\phi(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}(t^{-k})$.

IV. Complément sur l'équation de Bessel

On vient de voir dans la partie précédente que dans le cas où l'ordre λ n'est pas entier la méthode de Frobenius conduit à la détermination de deux solutions indépendantes définies sur $\mathbf{R}_+^*$, φ_λ et $\varphi_{-\lambda}$, ce sont, à une constante multiplicative près, ce que l'on appelle les fonctions de Bessel de première espèce. Elles constituent une base de l'ensemble de toutes les solutions définies sur cet intervalle, φ_λ admet une limite en 0, $\varphi_{-\lambda}$ non : l'ensemble des solutions prolongeables par continuité en 0 est donc une droite. Dans le cas d'un ordre entier la méthode de Frobenius ne fournit qu'une droite de solutions qui sont par ailleurs prolongeables par continuité en 0. Il faut donc avoir recours à des méthodes assez techniques pour déterminer toutes les solutions (fonctions de Bessel de seconde espèce). Or dans la pluspart les applications physiques classiques, étude de la propagation de la chaleur dans un disque, membrane circulaire vibrante etc., on ne s'intéresse qu'aux solutions admettant une limite en l'origine. Il est donc intéressant de savoir qu'*a priori* l'ensemble de ces solutions est une droite, ce qui permet de se limiter dans leur détermination à appliquer la méthode de Frobenius, y compris dans le cas d'un ordre entier. C'est l'objet de cette partie.

Nous allons montrer que : *Pour tout réel positif ou nul λ, l'ensemble des solutions de l'équation* (31) *définies sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongeables par continuité en* 0, *est une droite vectorielle.*

1. Variation du wronskien —
   Soient a, b, c des applications d'un intervalle d'intérieur non vide I dans $\mathbf{R}$, continues. On suppose que a ne s'annule pas et l'on considère l'équation différentielle linéaire du second ordre,
   $$a(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+c(x)y=0, \tag{36}$$
   Soient φ_1 et φ_2 des solutions définies sur I de (36) ; on désigne par $w_{(\varphi_1,\varphi_2)}$ le wronskien du couple (φ_1,φ_2). Montrer que : pour tout élément t_0 et tout élément t de I,
   $$w_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t)=w_{(\varphi_1,\varphi_2)}(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{-b(\tau)}{a(\tau)}\mathrm{d}\tau\right).$$
   En particulier si b est l'application nulle, alors $w_{(\varphi_1,\varphi_2)}$ est constant. On aura besoin du résultat technique suivant, vu dans le chapitre sur l'intégration :

   Soient f et g des applications d'un intervalle $]\alpha,\beta]$, avec $-\infty\leq\alpha<\beta<+\infty$, ou d'un intervalle $[\beta,\alpha[$, avec $-\infty<\beta<\alpha\leq+\infty$, continues. On suppose que g est de signe constant au voisinage de α. Alors
   - Si $f(t)\underset{t\to\alpha}{\sim}g(t)$ et si f donc g sont non intégrables, alors $\displaystyle\int_x^\beta f(t)\mathrm{d}t\underset{x\to\alpha}{\sim}\int_x^\beta g(t)\mathrm{d}t$;
   - Si $f(t)=\underset{t\to\alpha}{\mathrm{o}}\Big(g(t)\Big)$ et si f est non intégrable, alors $\displaystyle\int_x^\beta f(t)\mathrm{d}t=\underset{x\to\alpha}{\mathrm{o}}\left(\int_x^\beta g(t)\mathrm{d}t\right)$;
   - Si $f(t)=\underset{t\to\alpha}{\mathrm{O}}\Big(g(t)\Big)$ et si g donc f sont intégrables, alors $\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\mathrm{d}t=\underset{x\to\alpha}{\mathrm{O}}\left(\int_\alpha^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.
2. Transformation de Liouville —
   Soit ℓ une application de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs strictement positives. Nous notrons λ l'application $\frac{1}{\ell}$, application également de calsse $\mathcal{C}^2$. Soit φ un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R}_+^*,\mathbf{R})$. Posons $\psi=\ell\varphi$.

   Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que φ est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de (31) si et seulement si, ψ est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre à préciser.

   Montrer que cette équation n'a pas de terme dérivé d'ordre 1 si et seulement si λ est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire
   $$2x^2\frac{\mathrm{d}y}{dx}+xy=0.$$
   Résoudre cette équation.
3. Dans la suite on prend pour ℓ l'application
   $$\ell\ :\ \mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}\,;\ x\mapsto x^{1/2}, \tag{37}$$
   Montrer que φ est solution de (31) sur $\mathbf{R}_+^*$, si et seulement si, l'application ψ est solution, sur le même intervalle, de l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :
   $$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+\left(1-\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)z=0. \tag{38}$$

4. On suppose que $\lambda = \frac{1}{2}$. Résoudre (38) et conclure.
5. On Suppose maintenant jusqu'à la fin que $\lambda \neq \frac{1}{2}$. φ désigne désormais une solution de (31), prolongeables par continuité en 0. on note $\varphi(0^+)$ la limite de φ en 0 et l'on pose $\psi = \ell\varphi$. Soit x_0 un point de $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que :

$$\psi'(x) = \psi'(x_0) + \int_x^{x_0} \left(1 - \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\right) \psi(t)\mathrm{d}t. \tag{39}$$

6. (a) Premier cas : $\varphi(0^+) \neq 0$.
   Montrer que

$$\psi'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x - \frac{2(\lambda^2 - \frac{1}{4})}{x^{1/2}}\varphi(0^+). \tag{40}$$

   (b) Second cas : $\varphi(0^+) = 0$.
   Montrer :

$$\psi'(x) = \underset{x\to 0^+}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{x^{1/2}}\right), \tag{41}$$

7. Soient φ_1 et φ_2 des solutions de (31), prolongeables par continuité en 0. Posons $\psi_1 = \ell\varphi_1$ et $\psi_2 = \ell\varphi_2$ et désignons par $w_{(\psi_1,\psi_2)}$, le wronskien du couple de solutions de (38), (ψ_1, ψ_2). Montrer que :

$$w_{(\psi_1,\psi_2)}(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0.$$

8. Conclure.

III. Comportement asymptotique des solution de l'équation de Bessel

Soit φ une solution non nulle, définie sur $\mathbf{R}_+^*$, de l'équation (31).
On se propose de montre qu' il existe des réels A et θ_0 tels que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\varphi(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x - \theta_0) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) . \tag{42}$$

Nous exclurons le cas $\lambda = \frac{1}{2}$, pour lequel, la solution ayant été explicitée au I., la preuve du résultat est immédiate.

Comme nous l'avons établi dans le III, l'application

$$\psi \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sqrt{x}\varphi(x)$$

est une solution non nulle de (38). On intuite donc qu'au voisinage de $+\infty$, $\psi(x)$ se comporte comme une solution de l'équation de l'oscillateur harmonique $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -z$, puisque la quantité $\frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ [19]. Or le passage en coordonnées polaires dans un oscillateur harmonique conduit à un système d'équations particulièrement simple [20] :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -1. \end{cases}$$

Ceci nous incite à passer en polaires.

---

19. Notons qu'il est essentiel de raisonner sur l'équation (38) et non (31), en effet dans cette dernière le terme dérivée d'ordre 1 a des effets sur le long terme difficiles à contrôler.

20. Les coordonnées polaires fournissent pour l'oscillateur harmonique un exemple de ce que l'on appelle en général « variables d'action-angle ».

1. Montrer que pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$, $(\psi(x), \psi'(x)) \neq (0,0)$.
2. En déduire qu'il'existe une application ω, de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} \psi(x) &= \rho(x)\cos\left(\omega(x)\right), \\ \psi'(x) &= \rho(x)\sin\left(\omega(x)\right), \end{aligned}$$
avec $\rho\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sqrt{\psi(x)^2 + \psi'(x)^2}$
3. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$\rho'(x) = 0 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\sin\left(\omega(x)\right)\cos\left(\omega(x)\right)\rho(x), \tag{43}$$
$$\omega'(x) = -1 + \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\cos^2\left(\omega(x)\right). \tag{44}$$
4. Montrer que pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$,
$$\omega(x) + x = \omega(\pi) + \pi + \int_\pi^x \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\cos^2\left(\omega(t)\right)\mathrm{d}t.$$
5. Montrer que $\omega(x) + x$ admet une limite, limite que dans la suite nous noterons θ_0.
6. Montrer pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$,
$$\omega(x) = -x + \theta_0 - \int_x^{+\infty} \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\cos^2\left(\omega(t)\right)\mathrm{d}t.$$
7. En déduire que
$$\omega(x) = -x + \theta_0 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{45}$$
8. En raisonnant de la même manière montrer que $f\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4}}{t^2}\sin\left(\omega(t)\right)\cos\left(\omega(t)\right)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

   En en posant pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, montrer que :
$$F(x) = \underset{x \to +\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{46}$$
9. En déduire qu'il existe un réel A tel que, pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$,
$$\rho(x) = A + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{47}$$
10. Montrer que
$$\psi(x) = A\cos\left(x - \theta_0\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$
11. Conclure.

Les solutions de (31) se comportent donc au voisinage de $+\infty$, en quelque sorte comme des « sinusoïdes amorties ».

Travaux dirigés n°23

O. Échauffement

Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Montrer que M et $M^\top M$ on même rang.
f Indication. On pourra étudier le noyau de $M^\top M$.

I. Décomposition polaire.

Les éléments de $\mathbf{R}^n$ sont notés en colonne.

1. Racine dune matrice symétrique définies positive —
   Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$
   (a) Montrer qu'il existe un élément B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que
   $$B^2 = A.$$
   (b) Soit B' un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que $B^2 = A$. Montrer que les sous-espaces propres de A sont stables par l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à B'.
   En déduire que $B' = B$.
   (c) On se propose de montrer que $B' = B$ différement. Montrer que B est un polynôme en A. En déduire que $B' = B$.

   On peut donc désigner sans ambiguité, l'élément B comme la *racine carrée* de A et le noter : $\sqrt{A}$.
2. La décomposition —
   (a) Soit $\phi \;:\; \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})\,;\; (O, S) \mapsto OS$. Montrer que ϕ est une bijection.

   Donc pour tout élément M de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ existent un unique couple (O, S) élément de $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tel que : $M = OS$, ce couple s'appelle la décomposition polaire de M.
   (b) Montrer que ϕ est un homéomorphisme.
   (c) Montrer que pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ il existe un couple $\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{+}(\mathbf{R})$ tel que $M = OS$.
   Ce couple est-il unique ?
   (d) Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs en déduire la connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.

II. Diagonalisation des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Nous nous proposons de donner une autre preuve du théorème spectral. Elle ignore l'existence de $\mathbf{C}$ et se fonde sur un principe variationel. Le chapitre prochain éclairera sa nature profonde par le théorème des extremums liés.

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de dimension non nulle n. On note B la forme bilinéaire et Q la forme quadratique associées à u :

$$B \;:\; \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}\,;\; (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x} | u(\vec{y}) \rangle\,,$$

$$Q \;:\; \mathbf{E} \to \mathbf{R}\,;\; \vec{x} \mapsto \langle \vec{x} | u(\vec{x}) \rangle\,.$$

1. Montrer qu'il existe un élément$\vec{f}$ de la sphère unité S de $\mathbf{E}$, tel que

$$Q\left(\vec{f}\right) = \sup\left\{Q\left(\vec{g}\right), \vec{g} \in S\right\}.$$

2. Posons $\lambda = Q(\vec{f})$ et

$$B' : E \times \mathbf{E} \to \mathbf{R};\ (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \lambda \left\langle \vec{x} | \vec{y} \right\rangle - B\left(\vec{x}, \vec{y}\right).$$

   (a) Montrer que B' est une forme bilinéaire symétrique positive. Soit

$$Q' \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{R} \ \ \vec{x} \mapsto B'(\vec{x}, \vec{x}).$$

   Montrer que $Q'(\vec{f}) = 0$.

   (b) En déduire : $u\left(\vec{f}\right) = \lambda \vec{f}$

3. En déduire que l'orthogonal de $\vec{f}$, noté H est stable par u.
4. Montrer qu'il existe une base orthonormale de $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, de $\mathbf{E}$, constituée de vecteurs propres de u.

III. Décroissance du passage à l'inverse sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ [21]

On se donne un entier $n \geq 1$. Les éléments de $\mathbf{R}^n$ seront notés en colonne et l'on munira cet espace du produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$, tandis que $\|\cdot\|$ désignera la norme euclidienne associée.

Pour signifier qu'un élément M de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est défini-positif, (resp. positif) on écrit :

$$M \succ 0_n (\text{resp. } M \succeq 0_n).$$

Plus généralement pour tout couple (C, D) d'éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, on note $C \succ D$(resp. $C \succeq D$) si par définition $C - D \succ 0_n$(resp. $C - D \succeq 0_n$).

1. Préliminaires —

   (a) Montrer que $\succeq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Est-ce une relation d'ordre totale ?

   Dans la suite on désigne par A et B des éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

   (b) Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ alors il en est de même de $A+B$.

   (c) Montrer que si $A \succ 0_n$ alors A est inversible et $A^{-1} \succ 0_n$.

   Nous allons prouver le résultat suivant.

   Proposition. *Si $A \succ B \succ 0_n$ alors $B^{-1} \succ A^{-1} \succ 0_n$.*

2. Première méthode —

   (a) Pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ on pose :

   $$\Phi_M \ : \ \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\,;\ (X, Y) \mapsto^{\mathrm{t}} XMY.$$

   Montrer que pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, l'application Φ_M est une forme bilinéaire symétrique et que Φ_A est un produit scalaire.

   (b) Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à $A^{-1}B$ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(\mathbf{R}^n, \Phi_A)$.

   (c) Déduire de la sous-question précédente qu'il existe des réels $b_1, b_2, ... b_n$ et un élément P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que :

   $$A =^{\mathrm{t}} PP,\ B =^{\mathrm{t}} P\mathrm{diag}(b_1, b_2, ..., b_n)P.$$

   (d) Soient X et Y des éléments de $\mathbf{R}^n$. On pose $X' = PY$ et $Y' = PY$. Exprimer $\Phi_A(X, Y)$ et $\Phi_B(X, Y)$ en fonction de X' et Y'.

   (e) Prouver la proposition.

3. Mise en garde(réservé 5/2) — Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres, distinctes ou non, de A classées par ordre croissant et $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ celle de B. Montrer que si $A \succeq B$ alors pour $i = 1, ..., n$, on a $\lambda_i \geq \mu_i$. Que dire de la réciproque ?

4. Deuxième méthode : transformation de Legendre

   Posons $f \ : \ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}\,;\ X \mapsto \frac{1}{2}\Phi_A(X, X)$.

   (a) Montrer que pour tout $Z \in \mathbf{R}^n$, l'application $(Z|\cdot) - f$ admet un maximum atteint en $A^{-1}(Z)$ et seulement en ce point.

   On pose pour tout $Z \in \mathbf{R}^n$, $f^*(Z) = \sup\limits_{X \in \mathbf{R}^n} ((Z|X) - f(X))$.

   On définit de même $g = \frac{1}{2}\Phi_B$ et g^*.

21. Tiré d'un bel article du Pr J.-B. Hiriat-Urruty RMS janvier 2021.

(b) Montrer que si $f \geq g$ alors $f^* \leq g^*$. En déduire que $B^{-1} \succeq A^{-1}$.

(c) Montrer que $B^{-1} \succ A^{-1}$.

5. TROISIÈME MÉTHODE

Soit l'application $S\ :\ [0,1] \to \mathcal{S}_n(\mathbf{R})\,;\ t \mapsto S(t)$ dérivable.

(a) Montrer que S' est à valeurs dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

(b) On suppose que S' est à valeur dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Montrer que S est strictement croissante en ce sens que pour tout couple (t_1, t_2) d'éléments de $[0,1]$ tels que $t_2 > t_1$ on a $S(t_2) \succ S(t_1)$.

(c) On suppose de surcroît que S est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer que S^{-1} est strictement croissante.

(d) Prouver la proposition.

On pourra introduire l'application $[0,1] \to \mathcal{S}_n(\mathbf{R})\,;\ t \mapsto A + t(B - A)$.

IV. Théorème de Courant-Fischer

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ de dimension non nulle n. D'après le cours il existe une base orthonormale de $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, de $\mathbf{E}$, constituée de vecteurs propres de u. On note λ_i la valeur propre associée à $\vec{e}_i$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et, quitte à permuter les vecteurs de la base, on suppose que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

On note B la forme bilinéaire symétrique associée à u :

$$B\ :\ \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{R}\,;\ (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x} | u(\vec{y}) \rangle$$

et Q la forme quadratique associée à B. Pour tout élément k de $\{0, 1 \ldots, n\}$, on note $\mathbf{E}_k$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k)$ et $\mathcal{E}_k$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{E}$ de dimension k. Enfin Pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$ non nul on pose $\hat{Q}(\vec{x}) := \frac{\langle u(\vec{x}) | \vec{x} \rangle}{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle}$, autrement dit, $\hat{Q}(\vec{x}) = Q\left(\frac{\vec{x}}{\|x\|}\right)$, ($\|\cdot\|$ désigne la norme associée à $\langle\cdot|\cdot\rangle$).

1. Montrer que $\lambda_1 = \min\{\hat{Q}(\vec{x}) | \vec{x} \neq \vec{0}_{\mathbf{E}}\}\,;\ \lambda_n = \max\{\hat{Q}(\vec{x}) | \vec{x} \neq \vec{0}_{\mathbf{E}}\}$.
2. Soit k un élément de $\{1, \ldots, n\}$, montrer que :

$$\lambda_k = \max\{\hat{Q}(\vec{x}) | \vec{x} \in \mathbf{E}_k - \{\vec{0}_{\mathbf{E}}\}\}.$$

3. Soient k un un élément de $\{1, \ldots, n\}$ et $\mathbf{F}_k$ un élément $\mathcal{E}_k$.

(a) Montrer que la dimension de $\mathbf{F}_k \cap \mathrm{vect}(\vec{e}_k, \ldots, \vec{e}_n)$ est supérieure ou égale à 1.

(b) En déduire le théorème de Courant-Fischer :

$$\lambda_k = \min\left\{\max\{\hat{Q}(\vec{x}) | \vec{x} \in \mathbf{F} - \{\vec{0}_{\mathbf{E}}\}\}\ |\mathbf{F} \in \mathcal{E}_k\right\}.$$

Vérifier que ce théorème généralise bien le résultat du 1.

4. Soit $\mathbf{H}$ un hyperplan de $\mathbf{E}$. On note B' la restriction de B à $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$, Q' celle de Q à $\mathbf{H}$. Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme g tel que pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$ élément de $\mathbf{H}$,

$$B'(\vec{x}, \vec{y}) = \langle g(\vec{x}) | \vec{y} \rangle.$$

Montrer que g est symétrique et exprimer g en fonction de u.

Pour tout élément $\vec{y}$ de H, on pose $\hat{Q}'(\vec{y}) = Q'\left(\frac{\vec{y}}{\|y\|}\right)$. On pourra au besoin noter pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $\mathcal{H}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{H}$ d'ordre k. Enfin $\mu_1, \mu_2 \ldots, \mu_{n-1}$, désignent, classées par ordre croissant, les valeurs propres de g.

5. Montrer que pour tout élément k de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, $\lambda_k \leq \mu_k$.
6. Soit k un élément de $\{1, 2, \dots, n-1\}$
   (a) Montrer que pour tout élément $\mathbf{F}$ de $\mathcal{E}_{k+1}$, $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$ est de dimension supérieure ou égale à k.
   (b) En déduire que $\mu_k \leq \lambda_{k+1}$.

   Finalement on a :
$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \dots \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n,$$
   c'est le « théorème d'entrelacement».

V. Caractérisation des matrices symétriques définies positives —
Soit A une matrice réelle d'ordre n symétrique. On note $a_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la i^{e} ligne et j^{e} colonne.

1. On suppose dans cette question que A est définie positive.
   (a) Montrer que $\mathrm{Det}(A) > 0$.
   (b) Plus généralement, on pose pour tout élément k de $\{1, \dots, n\}$,
$$A_k = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}.$$
   Montrer que pour tout élément k de $\{1, \dots, n\}$,
$$\mathrm{Det}(A_k) > 0. \tag{48}$$
2. On suppose que A vérifie (48). Montrer que A est définie positive, en raisonnant par récurrence sur l'ordre de la matrice et en appliquant le lemme d'entrelacement (exercice précédent) à A_{n-1}.
3. (a) Soit $\mathbf{F}$ et $\mathbf{H}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{E}$. On suppose que la restriction de ϕ à $\mathbf{F}$ est définie positive et la restriction de ϕ à $\mathbf{H}$ négative. Montrer qu'alors les sous-espaces $\mathbf{F}$ et $\mathbf{H}$ sont en somme directe.
   (b) Montrer que A est définie positive, en raisonnant par récurrence et appliquant la sous-question précédente à la forme bilinéaire symétrique associée à A sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, muni de sa structure euclidienne canonique [22].

22. C'est plus rapide que de redémontrer le lemme d'entrelacement.