DM n°2

Chaînes de Markov

Dans tout le sujet n est un entier supérieure ou égal à 2.
On étudie une suite $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans l'ensemble $[\![1,p]\!]$. On suppose que pour tout $k\in\mathbf{N}$, la probabilité que S_{k+1} prenne une valeur j ne dépend que de la valeur de S_k, (On dit que ≪ l'avenir ne dépend que du présent et non du passé ≫). Précisément on suppose l'existence d'une matrice T élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (appelée matrice de transition) telle que pour tout couple (i,j) d'éléments de $[\![1,n]\!]$:

$$\forall k\in\mathbf{N},\ \mathbf{P}(S_{k+1}=i|S_k=j)=t_{i,j}.$$

On pose $A=T^\top$ et pour tout $k\in\mathbf{N}$ on note X_k l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

$$X_k=\begin{pmatrix}\mathbf{P}(S_k=1)\\ \vdots\\ \mathbf{P}(X_k)=n\end{pmatrix}.$$

1 Préliminaires

1. Justifier que pour tout entier naturel k,

$$X_{k+1}=TX_k.$$

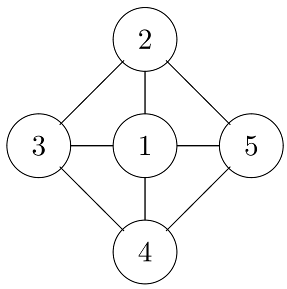
2. Montrer que la somme des coefficients d'une ligne de la matrice A est 1. En déduire que 1 est valeur propre de T.

   Dans la suite on dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une **matrice stochastique** si :
   i. les coefficients de M sont positifs ;
   ii. la sommes des coefficients de toute ligne de M vaut 1.

   La matrice A est donc stochastique. Le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ constitué des matrices stochastiques sera noté $\mathcal{E}$.
   Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $L=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est **stochastique** lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
4. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par produit.
   on pourra utiliser le vecteur colonne U, dont tous les n coefficients sont égaux à 1.

2 Un exemple

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ ($k \in \mathbf{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbf{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leq i \leq 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. A titre d'exemple, on aura donc pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbf{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbf{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la matrice colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_k = 1) \\ \mathbf{P}(S_k = 2) \\ \mathbf{P}(S_k = 3) \\ \mathbf{P}(S_k = 4) \\ \mathbf{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R})$$

5. Expliciter la matrice T de transition.
6. Déterminer la dimension de $E_1(T)$.
7. Montrer que les espaces propres de T associés aux valeurs propres de T autres que 1, sont dans l'hyperplan H de $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R})$ d'équation :

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0.$$

   On évitera de déterminer les sous-espaces propres et on reviendra à la définition d'un vecteur propre.

   On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

   $$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix} \tag{1}$$

8. Montrer qu'alors les variables alétoires S_k ont toutes la même loi.
9. Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

3 Matrice stochastiques

On identifiera les élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est les endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associés. Soit A l'élément de $\mathcal{E}$ défini en début de sujet.

10. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(1)\mathbf{R}$,

$$\|MX\|_\infty \leq \|X\|_\infty.$$

Pour tout k entier naturel non nul, on pose

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l$$

11. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
12. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n)$.
    On pourra étudier l'existence de la limite de $(R_k X)_{k\in\mathbf{N}}$ pour X élément de $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ *puis de* $\mathrm{Im}(A - I_n)$.
13. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers P, matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ selon $\mathrm{Im}(A - I_n)$.
    On pourra étudier la limite de $(E_i^\top R_k E_j)_{k\in\mathbf{N}}$, où E_k est le k^e vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
14. Montrer que P est stocastique.
    On suppose dans la suite qu'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p ait **tous ses coefficients strictement positifs.**
15. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
16. En déduire que que P est de rang 1 et que son image est dirigée par U, rappelons que $U = (1, 1, ..., 1)^\top$.
17. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où L est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ stochastique.
18. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
19. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.
20. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A.

4 Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie **2** en exploitant les résultats de la partie **3**.

Un calcul qui n'est pas demandé montre que pour cet exemple les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

21. Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ définie en (2).
22. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle la présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants).