DS n$^{\text{o}}$1

Sujet 1

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités (jusqu'à 15% de la note) pour
— manque de soin ou de lisibilité ;
— formules mathématiques non ponctuées ;
— recours à des abréviations autres que ssi (tt, qqs, fct., ens...), ou symbloles logiques mélangés à du texte.

L'usage de la calculatrice est interdite.

Notations
Soit f une application définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$,

$$U \to \mathbf{R}\,;\ (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2),$$

la première fonction dérivée partielle sera notée $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, la seconde $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ (la notation variant avec le nom des variables), mais aussi si l'on souhaite $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$.
Si les applications $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et on adopte les notations :
— l'application $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1}$ sera notée $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}$ ou $\partial^2_{1,1} f$;
— l'application $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)}{\partial x_2}$ sera notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ ou $\partial^2_{2,1} f$;
— l'application $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)}{\partial x_1}$ sera notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}$ ou $\partial^2_{1,2} f$;
— l'application $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)}{\partial x_2}$ sera notée $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}$ ou $\partial^2_{2,2} f$.
On admet que $\partial^2_{1,2} f = \partial^2_{1,2} f$.
Les dérivées partielles de $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont appelées dérivées partielles de f d'ordre 2.
On définit plus généralement la classe $\mathcal{C}^n$? pour $n \in \mathbf{N}^*$? par récurrence sur n : une application f de U dans $\mathbf{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ si, par définition, $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

PARTIE I. Applications homogènes

Dans cette partie C désigne un ouvert de $\mathbf{R}^2$ qui vérifie la propriété suivante : pour tout élément (x_1, x_2) de C et tout réel t *strictement positif*,

$$t(x_1, x_2) \in \mathbf{C}.$$

Soit α un réel. Une application de C dans $\mathbf{R}$ est dite homogène de degré α ou α-homogène, si par définition, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbf{C}$:

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+^*,\ f(\lambda(x_1, x_2)) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2).$$

1. Montrer que les applications suivantes sont homogènes en présisant le degré.

   (a) $C = \mathbf{R}^2$ et $f\ :\ (x_1, x_2) \mapsto 2x_1 + x_2$.
   (b) $C = {\mathbf{R}_+^*}^2$ et $f\ :\ (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^3 + 3x_1x_2^2}$.
   (c) $C = {\mathbf{R}_+^*}^2$ et $f\ :\ (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1x_2}{x_1^4+5x_1^2x_2^2}$.

2. Pour $C = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, déterminer l'ensemble E_0 des applications homogènes de degré 0 et constantes sur la droite d'équation $x = 1$.
3. Pour $C = {\mathbf{R}_+^*}^2$, donner un exemple d'application de C dans $\mathbf{R}$ homogène de degré -1 puis de degré π
4. Soient f une application de C dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et α un réel.

   (a) Montrer que si f est homogène de degré α, alors ses deux fonctions dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont homogènes d'un degré à préciser.
   (b) Montrer que pour tout élément (x_1, x_2) de C,
   $$x_1\partial_1 f(x_1, x_2) + x_2\partial_2 f(x_1, x_2) = \alpha f(x_1, x_2). \tag{1}$$
   On pourra pour (x_1, x_2) point donné de C, introduire l'application
   $$g\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto f(t(x_1, x_2))$$
   et la dériver de deux manières.
   (c) On suppose que pour tout $(x_1, x_2) \in C$, l'égalité (2) est satisfaite, montrer que f est α-homogène.

Jusqu'à la fin de la première partie $C = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. On considère l'application
$$g\ :\ C \to \mathbf{R}\,;\ (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^4 + x_2^4}.$$
Soient l'ensemble S_0 des applications f de C dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que pour tout point (x, y) de C,
$$x_1\partial_1 f(x_1, x_2) + x_2\partial_2 f(x_1, x_2) = 0,$$
S_g celui des applications f de C dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que pour tout point (x, y) de C,
$$x_1\partial_1 f(x_1, x_2) + x_2\partial_2 f(x_1, x_2) = g(x, y).$$
Enfin on note, pour tout α réel H_α, l'ensemble de applications de C dans $\mathbf{R}$, homogènes de degré α.

5. (a) Montrer que $H_0 = \{\mathbf{C} \to \mathbf{R}\,(x, y) \mapsto \phi\left(\frac{y}{x}\right), \phi \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}\}$.
   (b) Donner une expresssion similaire pour H_1.
   (c) Montrer que S_0 est un espace vectoriel.
   (d) Déterminer un élément h de S_g.
   On pourra utiliser l'égalité (1).
   (e) Exprimer S_g au moyen de h et de S_0.
   (f) Déterminer S_0 en utilisant (1).

6. On se propose de retrouver l'expression de S_0 en utilisant une autre méthode. Soit $f \in \mathcal{C}^1(C, \mathbf{R})$, on pose $U = \mathbf{R}_+^* \times \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et on l'on considère
$$p\ :\ U \to \mathbf{R}^2\,;\ (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

(a) Montrer que p induit une bijection de U sur C. Explicitez la bijection réciproque.

On considère $\tilde{f} = f \circ p$,

$$\tilde{f} \ : \ U \to \mathbf{R}\,;\ (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

(b) Soit $(r,\theta) \in U$. Calculer $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$, première dérivée partielle de $\tilde{f}$ au point (r,θ) en fonction des dérivées partielles de f au point $(r\cos(\theta), r\sin(\theta)$.

(c) Déduire de la précédente sous-question que f est élément de S_0 si et seulement si $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ est nulle sur U. Retrouver l'expression de S_0.

PARTIE II. Applications harmoniques

On désigne par U un ouvert de $\mathbf{R}^2$

Soit f une application de U dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle *laplacien* de f, noté $\Delta(f)$ l'application de U dans $\mathbf{R}$:

$$\Delta(f) = \partial^2_{1,1} f + \partial^2_{2,2} f.$$

On dit que f est *harmonique* si son laplacien est nul.

Ce problème étudie des fonctions harmoniques qui jouent un rôle cruciale dans les sciences, notamment en électrostatique, dans l'études des équilibre thermiques ou encore des membranes élastiques.

1. Montrer que l'ensemble des applications harmoniques d'un ouvert I de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel.
2. Fonctions harmoniques radiales

   Soit f une application de l'ouvert $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe une application F,

   $$F \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto F(t),$$

   telle que pour tout élément (x_1, x_2) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

   $$f(x_1, x_2) = F\left(\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\right).$$

   On dit que f est *radiale*.

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si F est de classe $\mathcal{C}^2$.

   On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

   (b) Donner l'expression des dérivées partielles de f d'ordre 1, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ en un point (x_1, x_2) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, en fonction de la dérivée de F au point $\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$.

   (c) Donner l'expression des dérivées partielles de f d'ordre 2, en un point (x_1, x_2) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ en fonction des dérivées première et seconde de F au point $\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$.

   (d) Montrer que Δf est l'application nulle sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ si et seulement si F' est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre homogène de la forme

   $${x_2}'(r) = a(r) x_2(r),$$

   que l'on déterminera.

   (e) Résoudre cette équation (avec la valeur de a trouvée dans la question précèdente).

   (f) Déterminer l'ensemble des applications de l'ouvert $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ harmoniques et radiales.

3. Fonctions harmoniques angulaires

On considère $\mathcal{P}$ le demi-plan ouvert de $\mathbf{R}^2$ d'équation $x_1 > 0$,

$$\mathcal{P} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_1 > 0\right\} = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}.$$

On définit la fonction G de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}$ par

$$G \;:\; \mathcal{P} \to \mathbf{R}\,;\; (x_1, x_2) \mapsto \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

(a) Montrer que G est une fonction harmonique sur $\mathcal{P}$.

(b) Déterminer toutes les applications φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que l'application f, définie par

$$f \;:\; \mathcal{P} \to \mathbf{R}\,;\; (x_1, x_2) \mapsto \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

soit harmonique sur $\mathcal{P}$.

On s'inspirera de la question précédente.

(c) Soit l'ensemble S_2 des applications f de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{P},\ \Delta f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{{x_1}^3}.$$

Déterminer toutes les applications φ de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que l'application f, définie par

$$f \;:\; \mathcal{P} \to \mathbf{R}\,;\; (x_1, x_2) \mapsto \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

soit élément de S_2.

PARTIE III. Fonctions polynômes homogènes de deux variables

Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels on pose

$$m_{i,j} \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\; (x_1, x_2) \mapsto x_1^i x_2^j,$$

appelée fonction monôme.

On note E les sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^2}$ des applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ enegendré par la famille $(m_{i,j})_{i,j \in \mathbf{N}^2}$, ses éléments sont appelés fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}^2$.
Tout élément p de E se met donc sous la forme :

$$p = \sum_{(i,j) \in \mathbf{N}^2} a_{i,j} m_{i,j},$$

où $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbf{N}^2}$ est une famille de réels *presque nulle* ;

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,\ p(x_1, x_2) = \sum_{(i,j) \in \mathbf{N}^2} a_{i,j} x_1^i x_2^j.$$

Enfin pour tout entier naturel N, on note E_N le sous-espace vectoriel de E engendré par $(m_{i,j})_{(i,j) \in I_n}$ où $I_n = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 | i + j = N\}$. Tout élément p de $E - n$ est se met donc sous la forme :

$$p = \sum_{\substack{1 \le i \le N \\ 1 \le j \le N \\ i+j=N}} a_{i,j} m_{i,j}.$$

On admet sans démonstartion le fait évident : tout élément de E est de classe C^N pour tout entier naturel N.

Soit $N \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que la famille $(m_{i,j})_{i,j\in\mathbf{N}^2}$ est libre.
2. Déterminer la dimension de E_N.
3. Soit $p \in E$. Montrert que p est homogène de degré N (voir première partie) si et seulement si $P \in E_N$.
4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, nulle en 0, dont les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont éléments de E_N. Montrer que f est élément de E_{N+1}.
5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^N$ sur $\mathbf{R}^2$ qui vérifie, pour tout couple (x_1, x_2) de réelss et tout λ **RÉEL**,
$$f(\lambda(x_1, x_2)) = \lambda^N f(x_1, x_2).$$
Montrer que f est élément de E_N.
On raisonnera par récurrence sur N.

On note HP_N l'ensemble des éléments de E_N harmoniques :
$$HP_n = \{p \in E_N | \Delta(p) = 0_{\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}}\}.$$

6. Déterminer HP_0 et HP_1.
7. Donner un élément non nul de HP_2.
8. On suppose $N \geq 2$. Soit p une élément de E_N. Montrer que $\Delta(p) \in E_{N-2}$.
En déduire que HP_n est non vide.
On pourra considérer $\Delta_N \ : \ E_N \to \mathbf{E}_N \,; p \mapsto \Delta(p)$.

⋆⋆
⋆

Réservé aux élèves ne repassant pas l'interrogation

Notations
On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels, par $\mathcal{M}_{n,p}$ celui des matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels.

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et T un endomorphisme non nul de X.
Soit $\mathcal{B}$ une base de X, on note $\mathrm{T}_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant T dans cette base. On note $N(T)$ le noyau de T et $R(T)$ l'image de T.
On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité. On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent, c'est-a-dire tel que $P^2 = P$. On note Id l'endomorphisme identité de X, I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n$ et O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n$. On désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}$ par $\mathrm{O}_{n,p}$

Les matrice seront désigné par des majuscules romaines, les endomorphismes par des majuscules italiques. Pour une matrice A on désigne l'élément de la i^{e} ligne et j^{e} colonne par $a_{i,j}$.
1- Traces et projecteurs
Si A est élément de $\mathcal{M}_n$, on appelle trace de A le nombre réel suivant :
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \,.$$

1. Soient A et B éléments de $\mathcal{M}_n$, montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

2. Montrer que la trace de la matrice $\mathrm{T}_{\mathcal{B}}$ associée à T est indépendante de la base $\mathcal{B}$.

   On appelle trace de T, notée $\mathrm{tr}T$*, la valeur commune des traces des matrices représentant T.*

   Soit P un projecteur de X.

3. Démontrer que $X = R(P) \oplus N(P)$.

4. En déduire que $\mathrm{rg}P = \mathrm{tr}P$.

   On pose $P' = Id - P$.

5. Montrer que $R(P') = N(P)$ et que $R(P) = N(P')$.

6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de X est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.

7. Montrer que si l'endomorphisme S est une somme finie de projecteurs P_i, $i \in \{1, ..., m\}$, alors $\mathrm{tr}S \in \mathbf{N}$ et $\mathrm{tr}S \geq \mathrm{rg}S$.

2-Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

8. Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $P \circ T \circ P = \mu P$.

   Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de X adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$.

9. Montrer que dans la base $\mathcal{C}$ la matrice représentant T s'écrit

$$\mathrm{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mu & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \mathrm{B} & \\ \times & & & \end{pmatrix}, \tag{2}$$

   où μ est le nombre réel dont l'existence a été prouvé en question 8 et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n-1}$.

10. Montrer que si $P' \circ T \circ P'$ n'est pas proportionnel à P', alors B, défini en (1), n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $P' = Id - P$.