# DS n$^{\text{o}}$1

## Sujet 2

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités (jusqu'à 15% de la note) pour
— manque de soin ou de lisibilité
— formules mathématiques non ponctuées
— recours à des abréviations autres que ssi (tt, qqs, fct., ens...), ou symbloles logiques mélangés à du texte.

**L'usage de la calculatrice est interdite. Notations et rappels**

Dans tout le problème, $n$ est un entier naturel non nul. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne à $n$ lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre $n$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On désigne par $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$ et par $0_n$ la matrice nulle d'ordre $n$

Pour toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle image de $M$, notée $\operatorname{Im} M$ l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$ et on appelle noyau de $M$, noté $\ker M$, le noyau de cet endomorphisme.

Pour toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée, $\det(M)$ son déterminant, $\operatorname{rg}(M)$ son rang, $\operatorname{tr}(M)$ sa trace, $\chi_M$ son polynôme caractéristique et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes.

On note $\mathcal{T}$ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice $M$ associe $M^\top$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, la $j$-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ en $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme $f$. On définit la suite des puissances de $f$ en posant

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad f^{k+1} = f \circ f^k. \end{cases}$$

Si $\Pi = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle que $\Pi(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^k$.

Lorsque $M_1, \ldots, M_k$ désignent des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_k$, on note $\operatorname{diag}(M_1, \ldots, M_k)$ la matrice carrée d'ordre $n_1 + \ldots + n_k$, diagonale par blocs, égale à

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un endomorphisme $\Phi$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
— conserve le rang si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}\big(\Phi(M)\big) = \operatorname{rg}(M)$ ;

— conserve le déterminant si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\big(\Phi(M)\big) = \det(M)$ ;
— conserve la trace si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}\big(\Phi(M)\big) = \operatorname{tr}(M)$ ;
— conserve le polynôme caractéristique si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{\Phi(M)} = \chi_M$.

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes réalisant l'une de ces propriétés.

# I Résultats préliminaires

***I.A*** – On suppose que $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que $f$ et $g$ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

**Q 1.** *Question de cours.* Démontrer que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

**Q 2.** En déduire qu'il existe deux matrices $P$ et $Q$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = P\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f)Q.$$

**I.B –** On suppose que $M$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Q 3.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $M$ et $X$ un vecteur propre associé. Montrer que, pour tout entier naturel $k$, $M^k X = \lambda^k X$.

**Q 4.** En déduire que, si $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de $M$, alors toute valeur propre complexe de $M$ est une racine dans $\mathbb{C}$ de $\Pi$.

# II Étude de quelques endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

***II.A – Multiplication à gauche par une matrice donnée***

L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Gamma_A$ l'application

$$\Gamma_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

**Q 5.** Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma_A$ appartient à $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

**Q 6.** Démontrer que, si $A$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $\Gamma_A$ conserve le rang.

**Q 7.** Démontrer que l'application

$$\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big) \\ A & \mapsto & \Gamma_A \end{array} \right.$$

est linéaire et injective.

Dans la suite de cette sous-partie II.A, $A$ est un élément fixé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Q 8.** Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k$.

**Q 9.** En déduire que, pour tout polynôme $\Pi$ de $\mathbb{R}[X]$, $\Gamma_{\Pi(A)} = \Pi(\Gamma_A)$.

**Q 10.** À l'aide du résultat précédent, démontrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $\Gamma_A$ est diagonalisable.

**Q 11.** Démontrer que $\chi_A$ est un polynôme annulateur de $\Gamma_A$ et que $\chi_{\Gamma_A}$ est un polynôme annulateur de $A$.

**Q 12.** En déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

***II.B – Multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles avec ou sans transposition préalable***

Pour toutes matrices $P$ et $Q$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$\Phi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMQ \end{array} \right.$$

$$\Psi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PM^\top Q \end{array} \right.$$

On admet que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \Phi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2 \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{ \Psi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2 \right\}.$$

**Q 13.** Démontrer que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall (\Theta, \Theta') \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2, \qquad \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

**II.B.1)** Soient $P$ et $Q$ deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

**Q 14.** Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs applications réciproques.

**Q 15.** Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

**Q 16.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur $P$ et $Q$ pour que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant.

**Q 17.** Montrer que $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique.

**II.B.2)** Dans cette section, on prend $n \geqslant 2$.

**Q 18.** Montrer que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$.

**Q 19.** En déduire que les ensembles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont disjoints.

# III Endomorphismes de rang donné

On suppose que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Son noyau est noté $\ker(f)$.

***III.A*** – On suppose dans cette sous-partie que $f$ est un isomorphisme. On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}'$ la base

$$\mathcal{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big).$$

**Q 20.** Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

***III.B*** – On suppose dans cette sous-partie que $f$ n'est pas l'endomorphisme nul et que $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(f)$, que l'on complète (à gauche) en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, \mathcal{B}_2)$ de $\mathbb{R}^n$.

**Q 21.** Montrer que la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_k)\big)$ est libre.

**Q 22.** Justifier que $k < n$.

On complète la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_k)\big)$ en une base $\mathcal{B}' = \big(f(e_1), \dots, f(e_k), f_{k+1}, \dots, f_n\big)$ de $\mathbb{R}^n$.

**Q 23.** Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

***III.C*** – Dans toute la suite du problème, pour tout entier entier naturel $r \in [\![0, n]\!]$, on note

$$J_{n,r} = \mathrm{diag}\left(I_r, 0_{n-r}\right)$$

en convenant que $J_{n,n} = I_n$ et $J_{0,n} = 0_n$.

Soit $M$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r$.

**Q 24.** Montrer qu'il existe deux matrices $P$ et $Q$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \Phi_{P,Q}\left(J_{n,r}\right).$$

***III.D*** – On suppose dans cette sous-partie que $n = 2$ et que $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1. On suppose que $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{Im}\, B$ sont distinctes.

**Q 25.** Montrer qu'il existe deux matrices $P_2$ et $Q_2$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \qquad \text{et} \qquad B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels, non tous deux nuls.

# IV Endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang

Dans toute cette partie, on suppose que $n = 2$.

On désigne par $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

***IV.A*** –

**Q 26.** Expliciter la matrice de la transposition $\mathcal{T}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Cette matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sera notée $T$.

**Q 27.** Justifier sans calcul que $T$ est diagonalisable

**Q 28.** Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\mathcal{T}$.

On se donne deux éléments $P$ et $Q$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$,

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

**Q 29.** Montrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi_{P,Q}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} aU & bU \\ cU & dU \end{pmatrix},$$

où $U$ est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.

*On suppose dans la suite de cette partie que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le rang.*

***IV.B*** –

**Q 30.** Montrer que $\Phi$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Q 31.** Déterminer les rangs de $\Phi(B_1)$, $\Phi(B_4)$, $\Phi(B_1 + B_4)$. En déduire l'existence de deux matrices $P_1$ et $Q_1$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, telles que :

$$\Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

On adopte alors les notations suivantes : $\Phi' = \Phi_{P_1,Q_1} \circ \Phi$, $M' = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}}(\Phi')$.

Pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $B'_j = \Phi'(B_j)$ et $C_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)^\top$ désigne la $j$-ième colonne de la matrice $M'$.

**Q 32.** Déterminer $C_1$ et $C_4$.

**Q 33.** Démontrer que $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_i d_i - b_i c_i = 0$.

**Q 34.** En considérant le rang des matrices $B'_1 + B'_2$ et $B'_1 + B'_3$, démontrer que $d_2 = d_3 = 0$.

On déduit des deux questions précédentes que $b_2 c_2 = b_3 c_3 = 0$.

***IV.C*** – On suppose dans cette sous-partie que $c_2 = 0$.

**Q 35.** En étudiant $\det(M')$, démontrer que les nombres $b_2$, $c_3$, $d_4$ sont tous trois non nuls.

**Q 36.** En utilisant les résultats de la question précédente et en considérant les rangs des matrices $B'_3 + B'_4$, $B'_2 + B'_4$ et $B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4$, démontrer que

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

avec $c_4 = a_2 c_3$ et $d_4 = b_2 c_3$.

**Q 37.** En déduire que $\Phi$ appartient à $\mathcal{L}_1$.

***IV.D*** – On suppose à présent que $c_2 \neq 0$.

**Q 38.** Démontrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{ca}}$, de l'endomorphisme $\Phi' \circ \mathcal{T}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

**Q 39.** Démontrer que $c_3 = 0$.

**Q 40.** En déduire que $\Phi$ appartient à $\mathcal{L}_2$.

On a ainsi démontré, pour $n = 2$, qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conserve le rang si et seulement s'il appartient à $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.

*On admet que ce résultat est encore valable lorsque $n$ est un entier strictement supérieur à 2.*

# V Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le déterminant ou le polynôme caractéristique

***V.A*** – On suppose dans cette sous-partie que $n = 2$ et que $\Phi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ conservant le déterminant.

On considère une matrice $A$ non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\Phi(A) = 0_2$.

**Q 41.** Montrer que $A$ est de rang 1 .

La partie III assure l'existence de deux éléments $P$ et $Q$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$A = PJ_{2,1}Q.$$

On pose alors $N = P(I_2 - J_{2,1})Q$.

**Q 42.** En calculant de deux manières différentes $\det(A + N)$, aboutir à une absurdité et conclure que $\Phi$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Q 43.** En discutant selon les valeurs possibles du rang, démontrer que $\Phi$ conserve le rang.

On a ainsi démontré que tout endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui conserve le déterminant conserve le rang. On admet que ce résultat s'étend au cas où $n$ est un entier naturel non nul quelconque.

**Q 44.** Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le déterminant.

***V.B*** – On revient au cas général où $n$ est un entier naturel non nul.

**IV.B.1) Propriétés de la trace**

**Q 45.** Démontrer que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(M) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire vérifiant

$$\forall (A, B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \qquad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

**Q 46.** Montrer que l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & \mathrm{tr}\left(A^\top B\right) \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Q 47.** En déduire que, si une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{tr}(AM) = 0,$$

alors $A = 0$.

**V.B.2) Application à la caractérisation des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ conservant le polynôme caractéristique**

**Q 48.** Démontrer qu'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conserve le polynôme caractéristique conserve également le déterminant et la trace.

**Q 49.** Caractériser les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

• • • FIN • • •