Programme de colles n°1

1 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
— Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
— à venir : semaine prochaine formes linéaires, hyperplans
— Matrices :
  — Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme.
  — Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
— *Semaine prochaine diagonalisation, trigonalisation, (point de vue géométrique et pratique) et révisions de probabilités de sup.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

2 Questions de cours

1. Théorème du rang : l'image d'une application linéaire est isomorphe à un supplémentaire du noyau, application si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}'$ sont des supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel alors ils sont isomorphes (p. 40).
2. Tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de rang r est équivalent à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$ (Preuve algébrique cette semaine) .
3. Polynômes d'interpolation : existence unicité puis expression (page 42).

3 Récitation d'exercices

1. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ montrer l'équivalence des deux propositions
   (a) Pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\ell(AB) = \ell(BA)$;
   (b) Il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que $\ell = k\mathrm{tr}$.
2. Montrer que des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont semblables comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
3. $\star$ Même question pour équivalents. On donnera une preuve par densité algébrique, une utilisant les opérations élémentaires, et une le déterminant.

4. — Théorème d'Hadamard —

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, tel que pour $i = 1, 2, \ldots, n$

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1,\ldots,n,\\ j\neq i,}} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

5. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ tel que pour tout élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$, $(\vec{x}, u(\vec{x}))$ soit lié. Montrer que u est une homothétie. En déduire le centre de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$.
6. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Etudier le rang de $\mathrm{com}(M)$ en fonction de celui de M. Déterminer $\det(\mathrm{com}(M))$ et $\mathrm{com}(\mathrm{com}(M))$.

   Retrouver ces résultats par densité algébrique sans discuter sur le rang de M.
7. $\star$ $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique Pour toute permutation σ élément de S_n, on note P_σ la matrice de permutation associée à σ On pose :

$$P := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} P_\sigma.$$

   (a) Montrer que l'endomorphisme p de $\mathbf{R}^n$ associé canoniquement à P est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.

   (b) Montrer que p est orthogonale.

   (c) On munit S_n d'une probabilité uniforme et l'on désigne par X la variable aléatoire qui à σ élément de S_n associe le nombre de points fixes de σ. Calculer l'espérence de X.
8. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E, défini par

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$

   est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A.
9. $\star\star$ — Théorème de Frobenius-Zolotarev — Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ *continue* telle que :

   i. $f(I_n) = 1$;

   ii. pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$.

   Montrer qu'il existe une application g de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ continue vérifiant $g(1) = 1$ et $g(ab) = g(a)g(b)$ pour tout couple (a, b) de complexes, telle que :

$$f = g \circ \det.$$

10. Effet de la multiplication à droite ou à gauche par une transvection, inverse d'une transvection.
11. $\star$ Montrer que tout élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est un produit de matrices de transvection.
12. $\star\star$ Déterminer les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

Programme de colles n$^{\text{o}}$2

4 Révisions de probabilités de sup.

— Probabilités sur un ensemble fini.
— Variables aléatoires.

5 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

- Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Formes linéaires, hyperplans.
- Matrices :
  - Matrices semblables, deux matrices semblables ont même trace, trace d'un endomorphisme. Matrices équivalentes : des matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.
  - Opérations sur les lignes et colonnes.
- Diagonalisation. (*il s'agit d'une première approche géométrique axée sur la pratique, les applications le polynôme caractéristique. Un prochain chapitre traitera des polynômes d'endomorphismes et des questions subtiles de réduction*)

  On désigne u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
  - Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  - Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
- *A venir : révisions sur les déterminants, critère de diagonalisabilité, trigonalisation, ...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

6 Questions de cours

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont indépendants.
2. Polynôme caractéristique : polynomialité et coefficients remarquables.

7 Exercices

1. Déterminer les couples d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, (φ, ψ) tels que :
$$\left\{\begin{array}{l}\varphi' = 6\varphi + 4\psi,\\ \psi' = 11\varphi - \psi,\end{array}\right. , \tag{1}$$
2. Soit f un edomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension n non nulle. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $N_n = \mathrm{Ker}(f^n)$ et $I_n = \mathrm{Im} f^n$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que :
$$N_1 N_2 ....N_{n_0} = N_{n_0+1} = ... = N_n = ...$$
$$I_1\ I_2 ....\ I_{n_0} = \ I_{n_0+1} = ... = \ I_n = ...$$
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $I_n = I_{n+1}$ si et seulement si $I_n + N_n = I_n \oplus N_n$, (cf. TD 1).
$\star$ Montrer la décroissance de la suite $(\dim(N_{i+1}) - \dim(N_{i+1})_{i\in\mathbf{N}}$.
3. Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, 1. par densité algébrique, 2. en utilsant l'équivalence de A à $J_{\mathrm{rg}(A)}$.
4. $\star$ Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
5. Soit V une variable aléatoire définie sur un univers (fini) Ω, à valeurs dans $\{0, ..., n\}$.
Montrer que l'espérance de X est donnée par la formule
$$\mathrm{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(V \geq i).$$
Soient X et Y des variables alatoires définies sur Ω, indépendantes et qui suivent la loi uniforme sur $\{0, ..., n\}$. Calculer $\mathrm{E}(\min(X, Y))$.
6. Soient X_1, X_2,...,X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi, définies sur un même univers fini Ω, et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\{1, ..., n\}$ telle que $X_1, ..., X_n, T$ soient mutuellement indépendante.
On définit alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ... + X_T$.
   (a) Montrer que $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.
   (b) $\star$ Donner une formule analogue pour $\mathrm{V}(S)$.
   à suivre...
7. Soir une suite de variables aléatoires de Rademacher $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ mutuellement indépendantes et touteS définies sur un même espace probabilisé. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et l'on désigne par S_0 une variable aléatoire qui prend la valeur 0 avec la probabilité 1.
   (a) Montrer que la série $\sum \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$ diverge.
   (b) Soit la variable aléatoire R à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, définie par :
$$R = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n=0},$$
   (c) Montrer que $\mathbf{P}(R = +\infty) = 1$. Interpréter.
8. (a) Par K on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (ou même tout corps). Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
   (b) $\star$ Pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $[BC] = BC - CB$ (crochet de lie de B et C). Montrer qu'il existe des matrices B et C telles que $BC - CB = A$.

9. Forme de Jordan

   Notons pour tout entier $k \geq 2$, J_k l'élément de $\mathcal{M}_k(\mathbf{C})$ qui n'a que des 1 sur la sous-diagonale et des zéros partout ailleurs. et convenons que $J_1 = O_1$.

   Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, nilpotent d'ordre p.

   (a) Montrer pour $p = n$ que M est semblable à J_n.

   (b) $\star$ On suppose que $p = 2$. Montrer que M est semblable à $\mathrm{diag}(\underbrace{J_2, J_2, ...J_2}_{r \text{ termes}}, 0_{n-2r})$,

   où $r = \mathrm{rg}(M)$

   (c) $\star\star$ Montrer dans le cas général que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par u. En déduire qu'il existe un entier naturel $k \geq 1$, un élément $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ de $(\mathbf{N}^*)^k$ vérifiant : $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_k$, et $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$, tel que M soit semblable à la matrice $\mathrm{diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, ..., J_{\alpha_k})$.

   (d) $\star\star$ Etudier l'unicité d'une telle décomposition.

10. $\star\star$ On muni $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$. Déterminer les éléments P de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\|PMP^{-1}\| = \|\Phi(M)\|.$$

11. $\star\star$ Soit un entier $n \geq 1$ Déterminer k maximal tel qu'il existe $E_1, E_2, ..., E_k$ parties de $\{1, ..., n\}$ vérifiant

    i. le cardinal de E_i est impair pour $i = 1, ...n$;

    ii. le cardinal de $E_i \cap E_j$ est pair pour tout couple d'éléments distincts de $\{1, ..., n\}$.

Programme de colles n°3,

8 Révivions de sup.

— Déterminants, applications et calculs

9 Algèbre linéaire : révisions de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

Par **K** on désigne **R** ou **C**

- Espace vectoriels, familles libres, génératrices bases, base canonique de l'ensemble des applications polynômiales à p variables, somme directes, sous-espaces supplémentaires.
- Rang d'un endomorphisme, théorème et formule du rang, polynômes d'interpolation de Lagrange.
- Formes linéaires, hyperplans.
- Matrices : Voir programme précédent.
- Diagonalisation. On désigne u un endomorphisme d'un **K** espace vectoriel **E** de dimension finie non nulle. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u, d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_k$.
  - Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres : les espaces propres sont en sommes directes. Espaces propres de deux endomorphismes qui commutent.
  - Polynôme caractéristique (définitions, coefficients remarquables), polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
  - Diagonalisation des matrices et des endomorphismes. Définition. l'endomorphisme u diagonalisable si et seulement si $\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{E}_k = \mathbf{E}$. La dimension d'un espace propre est inférieur à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée. l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $m_i = \dim(\mathbf{E}_i)$, pour $i = 1 \ldots k$.
  - Trigonalisation, un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si et seulement si leur polynôme caractéristique est scindé. Application à la résolution de systèmes différentiels et de systèmes de relations de récurrences linéaires.
  - Matrices nilpotentes, définition, une matrice est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable à valeurs propres nulles.
  - *A venir : espace vectoriels normés...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noha Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

10 Questions de cours

1. Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'un espace vectoriel de dimension fini est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur **K**. Au choix du colleur,

l'hérédité se fera par les endomorphismes ou par les matrices en blocs.

2. Déterminants en blocs.

11 Exercices

1. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Dans le cas où son polynôme caractéristique est scindé, montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si ses valeurs propres sont simples.

2. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

   (a) Montrer qu'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ commute avec A si et seulement si toute base qui diagonamise A diagonalise M.

   (b) Détermine l'ensemble$E$ où :

   $$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}), M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   (c) En utilisant (a) déterminer le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de ce groupe qui commutent avec tous les autres.

3. Commutant d'un endomorphisme

   (a) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que l'ensemble $C(A)$ des matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on précisera la dimension. Montrer que tout élément de $C(A)$ est un polynôme en A.

   (b) $\star$ Même question pour une matrice compagnon (en colonne)

   (c) $\star$ Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant k valeurs propres deux à deux distinctes avec $k < n$ et diagonalisable. Déterminer la dimension de $C(A)$. Une matrice de $C(A)$ est-elle un polunôme en A.

4. On note les éléments de $\mathbf{R}^3$ en colonne. Déterminer les éléments $\begin{pmatrix} \phi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)$ tels que

   $$\begin{cases} 2\phi' = \phi + \chi + 2\psi, \\ 2\chi' = \phi + \chi - 2\psi, \\ 2\psi' = -\phi + \chi + 4\psi, \end{cases}$$

5. Déterminer les valeurs propres de la matrice L suivante. Est-elle diagonalisable ?

   $$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Même question pour l'élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, dont tous les coefficients diagonaux valent a et tous les autres b.

6. Soient n un entier strictement positif et M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour $n=3$, montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe une matrice triangulaire supérieure $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$, semblable à M, telle que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$, $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$.

   $\star$ Montrer le résultat pour n quelconque.

7. Soient z_1, z_2,...,z_n des nombres complexes, et P le polynôme
$$P = (X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n)$$
On suppose que P est à coefficients entier. Soit un entier $q \geq 2$. Montrer que
$$Q = (X - z_1^q)(X - z_2^q)\dots(X - z_n^q)$$
est à coefficients entiers.

8. $\star$ — THÉORÈME DE KRONECKER — Montrer que si P est un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ dont les racines complexes sont toutes de module inférieur ou égal à 1 tel que $P(0) \neq 0$, alors toutes les racines de P sont des racines de l'unité.

9. $\star\star$ Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,
$$\Psi_A \ : \ X \mapsto AXA.$$
   (a) Montrer que Ψ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
   (b) En supposant A réelle, montrer que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ induit par Ψ_A est une isométie pour la norme euclidienne canonique, si et seulement si A est orthogonale.

10. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de domension n et $k \in \{1, ..., n\}$. Que peut on dire d'un endomorphisme u qui laisse stable tous les sous-espaces vectoriels de dimension k ?

Programme de colles n$^{\text{o}}$4

12 Algèbre linéaire : révision de MPSI, utilisation pratique de la diagonalisation et trigonalisation

— Programme de la semaine précédente.

13 Espaces vectoriels normés

Il s'agit d'un premier contact...
— Définition de norme, espace vectoriel normé, distance à une partie non vide.
— Ouverts, fermés, intérieur, adhérence. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé, convergence d'une suite à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés. Caractérisation de l'adhérence par les suites, caractérisation des fermés et des fermés relatifs par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— *A venir : limite des applications, compacité...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noha Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

14 Questions de cours

1. Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un e.v.n., X un ensemble non vide. Montrer que $N_\infty : \mathcal{B}(X, \mathbf{E}) \to \mathbf{R}\,;\ f \mapsto \sup_{x\in X} \|f(x)\|$ est une norme.
2. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
3. Caractérisation de l'adhérence par les suites. Caractérisation d'un fermé par les suites.

15 Récitation d'exercices

1. Montrer que la distance à une partie A non vide d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ est $1-$lipschitzienne de $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Montrer que la distance d'un élément $\vec{x}$ de $\mathbf{E}$ à A est nulle si et seulement si $\vec{x}$ est adhérent à A.
2. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ des n-uplet de réels positifs. Soient p et q des réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) On admet que pour tout a et tout b réels positifs,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \text{ (inégalité de Young).}$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Que dire du cas $p = q = 2$?

(c) Montrer que, n_p est une norme sur $\mathbf{K}^n$.

3. On note $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b],\mathbf{R})$. Soit un réel $p > 1$. On admet que n_p est une norme sur $\mathbf{R}^n$. Montrer que

$$N_p \ : \ \mathbf{E} \to \mathbf{R}_+ \ ; \ f \mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbf{E}$.

4. Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbf{R}\right)$, $N_p(f) \underset{n\to+\infty}{\to} N_\infty(f)$.

Ou version $\star$

Soient ϕ et f des applications de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continues. On supose ϕ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et f à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. On pose pour tout entier $n \geq 0$, $I_n = \int_{[a,b]} \phi f^n$.

(a) Montrer que le suite $(\sqrt[n]{I_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.

(b) Montrer que le suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge de limite à déterminer.

5. Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}$ non trivial. Montrer que, soit il est de la forme $k\mathbf{Z}$, avec k élément de $\mathbf{R}_+^*$, soit il est dense dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ (on discutera sur la valeur de $\inf(G\cap\mathbf{R}_+^*)$).

6. $\star$ Soit $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ continues, muni de la norme N_1 (resp. N_∞). Soit F l'ensemble des éléments de $\mathbf{E}$ qui prennent en 0 la valeur 1. Quelle est l'intérieur de F ? Quelle est l'adhérence de F ? *L'étudiant fera de jolies figures claires et en couleur.*

7. Soit $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace vectoriel propre de $\mathbf{E}$ est d'intérieur vide. Montrer que l'adhérence d'un sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.

8. $\star$ On munit ℓ^∞ ensemble des suites réelles bornées de la norme N_∞. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de $\mathcal{P}$.

Révision —

9. Soit A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

10. $\star$ Soit A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.

11. Soit A une matrice stochastique d'ordre n, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficient strictements positifs et tel que la somme des coefficients de n'importe quelle colonne fasse 1 :

(a) Montrer que $1 \in \mathrm{sp}(A)$ et $\mathrm{sp}(A)$ est inclus dans le disque fermé unité de $\mathbf{C}$.

(b) Soit λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

(c) $\star$ Montrer qu'il existe un élément U de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives. On pourra, pour pour $(x_1, ..., x_n)^\top$ vecteur propre associé à une valeur propre de module 1, considérer $(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)^\top$.

(d) $\star$ Montrer que tout élément V de $\mathrm{E}_1(A)$ dont toutes les composantes sont strictement positives est colinéaire à U.
Indication : choisir λ tel que $U - \lambda V$ ait tous ses coefficients positifs et un au moins nul.

12. $\star\star$ Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension finie ; on désignera par $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{E}$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses de $\mathbf{E}$. Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} U_n$ est dense. Soit $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fermés de $\mathbf{E}$ telle que $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} F_n = \mathbf{E}$. Montrer que $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense.

13. $\star\star$ Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, qui converge simplement vers une application f.

(a) Soit ε un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier nnaturel n, on pose :

$$F_{n,\varepsilon} := \{\ x \in \mathbf{E} | \forall p \in \mathbf{N}, (p \geq n) \Rightarrow (\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon)\}$$

et

$$\Omega_\varepsilon := \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}.$$

Montrer que Ω_ε est un ouvert dense.

(b) Montrer que tout élément a de Ω_ε, admet un voisinage V tel que pour tout élément x de V, $\|f(x) - f(a)\| \leq 3\varepsilon$.

(c) Montrer que f est continue sur un G_δ dense. Application aux dérivées.

INDICATIONS

8. $\star$ On munit ℓ^∞ ensemble des suites réelles bornées de la norme N_∞. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites réelles ultimement nulles (polynômes). Déterminer l'adhérence de $\mathcal{P}$.

Preuve séquentielle

Notons ℓ_0 l'ensemble des suites réelles de limite nulle. Un élément u de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sera noté $u = (u(k))_{k\in\mathbf{N}}$, notation qui permettra de considérere des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (suite de suites !), on notera pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = (u_n(k))_{k\in\mathbf{N}}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

$\bullet \underline{\ell_0 \subset \overline{\mathbf{R}[X]}}$.

Soit $u \in \ell_0$. Considérons la suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$;la suite p_n est la troncarture de u au rang n :

$$p_n(k) = u(k) \text{ pour } k = 0, 1, ..., n \text{ et } p_n(k) = 0 \text{ pour } k \geq n + 1.$$

La suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers u. La convergence vers 0 de u nous livre un naturel N tel que pour tout $k \in [\![N, +\infty[\![$, $|u(k)| \leq \varepsilon$.

Soit alors un entier $n \geq N$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $k \leq n$ alors $|p_n(k) - u(k)| = 0 \leq \varepsilon$, et sinon $|p_n(k)_u(k)| = |u(k)| \leq \varepsilon$, puisque $k > n \geq N$; Donc

$$N_\infty(p_n - u) \leq \varepsilon.$$

Donc u, limite de la suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est adhérente à $\mathbf{R}[X]$

$\bullet \underline{\overline{\mathbf{R}[X]} \subset \ell_0}$.

Soit v un élément de $\overline{\mathbf{R}[X]}$, on dispose d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ de limite v et donc en particulier d'un élément n_0 tel que $N_\infty(v - q_{n_0}) \leq \varepsilon$. Notons d_0 le degré de q_{n_0}. Pour tout entier k, si $k \geq d_0$, alors

$$|v(k)| \leq |v(k) - q_{n_0}(k)| + |q_{n_0}(k)| \leq N_\infty(v - q_{n_0}) + 0 \leq \varepsilon.$$

Donc $v \in \ell_0$.

Par ces deux points ; $\ell_0 \subset \overline{\mathbf{R}[X]}$.

Preuve non séquentielle

$\bullet \underline{\ell_0 \subset \overline{\mathbf{R}[X]}}$.

Soit $u \in \ell_0$. La convergence vers 0 de u nous livre un naturel N tel que pour tout $k \in [\![N + 1, +\infty[\![$, $|u(k)| \leq \varepsilon$. Soit p le polynôme qui coïncide avec u sur $[\![0, N]\!]$ et qui est nul sur $[\![N + 1, +\infty[\![$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, si $k \leq N$ alors $|p(k) - u(k)| = 0 \leq \varepsilon$, et sinon $|p(k) - u(k)| = |u(k)| \leq \varepsilon$, et donc

$$N_\infty(p_n - u) \leq \varepsilon.$$

Donc la boule de centre u de rayon ε rencontre $\mathbf{R}[X]$. La suite u est donc adhérente à $\mathbf{R}[X]$.

$\bullet \underline{\overline{\mathbf{R}[X]} \subset \ell_0}$.

Soit v un élément de $\overline{\mathbf{R}[X]}$, La boule ouverte de centre v de rayon ε rencontre $\mathbf{R}[X]$ en un polynôme q. Notons d le degré de q. Pour tout entier k, si $k \geq d$, alors

$$|v(k)| \leq |v(k) - q(k)| + |q(k)| \leq N_\infty(v - q) + 0 \leq \varepsilon.$$

Donc $v \in \ell_0$.

Programme de colles n$^{\text{O}}$5

16 Espaces vectoriels normés

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Caractérisation séquentielle de la limite.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— *A venir : Révisions sur les fonctions d'une variable réelle...*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

17 Questions de cours

— Caractérisation séquentielle de la limite.
— Lipschitzité de la fonction distance à une partie non vide.

18 Récitation d'exercices

1. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, norme qui à une matrice associe la somme des valeurs absolues de ses coefficients. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est un ouvert dense.
   (b) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ fermé (dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$) et non borné.
2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montre que l'ensemble D_n des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisables est dense. Est il-ouvert ? fermé ?
3. $\star$ Soit un entier $n \geq 2$. On dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est cyclique si il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $(X, MX, ..., M^{n-1}X)$ soit libre.
   (a) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ cycliques est ouvert.
   (b) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable et λ_1, λ_2,...,λ_n ses valeurs propres. Montrer que si les λ_i, $i = 1, 2, ..n$, sont deux à deux distincts alors M est cyclique. Étudier la réciproque.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.

4. $\star$ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que O_n est dans l'adhérence de la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.
5. On pose $A = \{\exp(in), n \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que $\bar{A} = \mathbf{U}$.
6. $\star\star$ Reprendre la question précédente avec $A = \{\exp(in), n \in \mathbf{N}\}$.
7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans l'e.v.n. $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ qui converge vers un élément ℓ de $\mathbf{E}$. Soient $\Sigma\alpha_n$ une série à termes strictement positifs divergente, on note $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de ses sommes partielles. Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par,
$$\forall n \in \mathbf{N}, z_n = \frac{1}{S_n}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k,$$
Déterminer la limite de cette dernière suite.
8. $\star$ Même question que la précédente lorsque $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$.
9. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite puis un équivalent simple de son terme général [1].
10. Montrer que la relation
$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1+u_n), \end{cases}$$
définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donner la limite de cette suite, puis montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite à déterminer.
11. $\star$ Reprendre la question précédente et donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
12. Soit S des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,
$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$
Déterminer S par deux méthodes :
— en utilisant la densité de $\mathbf{Q}$;
— en régularisant par intégration.
13. $\star$ Soit S des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues telles que pour tout x et tout y réels,
$$f(x+y) + f(x-y)) = 2f(x)f(y).$$
   (a) Soit f un élément de S non nul. Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
   (b) Soit f un élément de S non nul est indéfiniment dérivable. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,
$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y).$$
   (c) Montrer que tout élément de S est indéfiniment dérivable. Déterminer S.
14. $\star\star$ Soit U un ouvert d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que U est homéomorphe à un fermé de $(\mathbf{E}\times\mathbf{R}, N_\infty)$. La norme N_∞ est définie par :
$$\forall(\vec{x}, y) \in \mathbf{E}\times\mathbf{R}; N_\infty(\vec{x}, y) = \sup(\vec{x}\|, |y|).$$

1. Dans cet exercice et le suivant, les élèves doivent connaître la méthode sans pour le moment, en comprendre l'origine.

15. $\star\star$ Soit f une application linéaire de R^n dans $\mathbf{R}^p$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert est ouvret.

16. $\star\star$ On munit ℓ_1 de la norme $N_1 \ : \ u \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$.

    (a) Vérivier que N_1 est bien une norme et déterminer l'adhérence de $\mathbf{R}[X]$ dans ℓ_1.

    (b) L'e.v.n. (ℓ_1, N_1) admet-il une partie dense dénombrable ?

    (c) On munit ℓ_∞ de la norme N_∞. Déterminer l'adhérence de $\mathbf{R}[X]$ dans ℓ_∞.

    (d) L'e.v.n. (ℓ_∞, N_∞) admet-il une partie dense dénombrable ?

Programme de colle n$^{\text{O}}$6,

19 Révision du cours sur les fonctions d'une variable réelle de MPSI

— Théorème de la limite monotone.
— Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de l'homéomorphisme croissant.
— Lemme de Rolle, inégalité des accroissements finis, théorème du prolongement $\mathcal{C}^n$.
— etc.
— Fonction. convexes.
 — Définition, interprétation géométrique en terme de corde, formule de Jansen.
 — Lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.
 — Caractérisation des fonctions convexes dérivables et deux fois dérivables. Une fonction dérivable convexe est au dessus de ses tangentes, position par rapport à une sécante.
 — Inégalité de convexité $e^x \geq 1 + x$, $\ln(1 + x) \leq x$, inégalité de Young, Inégalité de Hölder.
 — *A venir.* Espace vectoriels normmés, deuxième partie.

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

medskip
Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

20 Questions de cours

1. Théorème de Rolle, puis égalité des accroissements finis.
2. Soit f une application continue sur un intervalle I telle que sa restriction à $I \setminus \{a\}$ soit dérivable. On suppose que f' admet en a une limite épointé ℓ finie ou non. Montrer que
$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \underset{t \to a, t \neq a}{\longrightarrow} \ell.$$
Cas où ℓ est un réel.

21 Exercices

1. Enoncer le théorème de Darboux et donner en une preuve utilisant le théorème de la borne atteinte.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable qui admet 0 comme limite en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule, par l'une des deux méthodes suivantes laissées au choix du coleurs :
 — en utilisant le théorème de la borne atteinte (et un joli dessin) ;
 — en effectuant un changement de variable.

3. Inégalité de Kolmogorov —

   Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornée. On note $M_0 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ et $M_2 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f''(x)|$.

   Montrer que pour tout réel x,

   $$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

   On pourra appliquer l'inégalité de Taylor lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$, pour tout réel $h > 0$.

4. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convexe et non constante. Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.

5. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ strictement convexe continue[2]. On suppose que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f atteint sa borne supérieure en un et un seul point a de $\mathbf{R}$. Montrer que si f est de plus dérivable, alors a est **caractérisé** par $f'(a) = 0$.

6. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dérivable et strictement convexe. On suppose de plus que

   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty. \tag{2}$$

   Montrer que f' est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

   Version $\star$ On ne suppose en plus f que dérivable et non de classe $\mathcal{C}^1$.

7. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et f une application d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que f admet $n+1$ zéros comptés avec leurs ordres. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

8. Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, soient enfin $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n+1$ points deux à deux distincts de $[a,b]$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, que nous noterons P, qui coïncide avec f en chacun des points x_i

   (b) Montrer que pour tout élément x de $[a,b]$ il existe un élément y de $[a,b]$ tel que :

   $$(f-P)(x) = f^{(n+1)}(y) \cdot \frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!},$$

9. $\star$ — Égalité de Taylor Lagrange — Soit n un entier naturel, et soit f une application d'un segment $[a,b]$ $(a < b)$ à valeurs réelles, $n+1$ fois dérivable, soit enfin x_0 un point de $[a,b]$. Montrer que pour tout élément x de $[a,b]$, il existe un élément y de $]\overleftrightarrow{x_0, x}[$, tel que :

   $$f(x) = \sum_{i=0}^{n}(x-x_0)^i \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} + (x-x_0)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.$$

   Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ retrouver ce résultat par la formule de Taylor avec reste intégrale.

2. la continuité des applications convexes sur l'intérieur de leur intervalle de définition n'est pas au programme

10. Énoncer et prouver les inégalités de Young et Hölder.
11. $\star$ Inégalité de Jensen —
    Soit f une application d'un segment $[a, b]$, non réduit à un point, à valeurs réelles, continue et *convexe*. Soient x une application de $[0, 1]$ à valeurs dans $[a, b]$continue et α une application de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ continue telle que :
    $$\int_0^1 \alpha(t)\mathrm{d}t = 1.$$
    (a) Montrer que : $\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t \in [a, b]$.
    (b) Montrer que $f\left(\int_0^1 \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t\right) \leq \int_0^1 \alpha(t)f(x(t))\mathrm{d}t$.
12. $\star$ —Inégalité de Höfding — Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes centrées, et $(c_i)_{1\leq i\leq 1}$ une suite de réels telles que pour $i = 1, 2, ..., n$ on ait presque sûrement $|X_i| \leq |c_i|$. On note $S_n = X_1 + X_2 + ...X_n$ et $C_n = c_1^2 + c_2^2 + ...c_n^2$.
    (a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout réel t, $\exp(tx) \leq \frac{1-x}{2}\exp(-t) + \frac{1+x}{2}\exp(t)$.
    (b) Soit X une variable aléatoire centrée tel que $|X| \leq 1$, p.s. Montrer que $\mathrm{E}(\exp(tX) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
    (c) En déduire que $\mathrm{E}\left(\exp(tS_n)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}C_n\right)$.
    (d) Montrer que $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2C_n}\right)$.
13. $\star$ Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.
    $\star\star$ Le résulat demeure-t-il pour f non continue[3] ?
14. $\star\star$ On suppose que tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ il exise au moins un élément t de $]0, 1[$ tel que :
    $$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$
    Montrer que f est convexe.
15. $\star\star$
    (a) Montrer qu'une fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ qui admet en tout point un maximum est constante.
    (b) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On appelle valeur maximale, tout réel y tel qu'il existe un réel x en lequel f admet un maximum local. Montrer que l'ensemble des valeurs maximales de f est au plus dénombrable.
    (c) Montrer qu'une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ qui admet en tout point un extremum local est constante.

3. On admettra au besoin l'existence de bases du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$.

Programme de colles n$^{\mathrm{O}}$7

22 Espaces vectoriels normés

- Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
- Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
- Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
- Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
- Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
- Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
- Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
- Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$. Les compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$ sont les parties fermées bornées ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
- Connexité par arcs : convexes (caractérisation par le barycentre de n points), parties étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).

  Les ensembles convexes seront au centre du prochain programme
- *A venir : intégrales convergentes. Chapitre III sur les e.v.n.*

  Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

  medskip

  Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

23 Questions de cours

1. Compacité d'un segment de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Par dichotomie ou par le lemme du soleil levant au choix du coleur.
2. Une suite d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ à valeurs dans un compact K converge si et seulement si elle admet une et une seule valeur d'adhérence.

24 Récitation d'exercices

1. Montrer que toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue et périodique est uniformément continue.

2. Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ de dimension finie. Soient k un élément de $[0,1[$, et $\vec{f}$ une application de F dans F k-contractante. On note $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des itérés d'un point $\vec{a}$ de K par f.

   (a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet un et un seul point fixe, en utilisant ou sans utiliser les séries, au choix du colleur.

   (b) $\star$ Montrer que le résultat demeure si l'on suppose qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\vec{f}^N$ soit k-contractante.

   (c) $\star$ Dans le cas ou F est un compact étoilé, montrer que le résultat demeure en ne supposant plus que f est k-contractante mais seulement 1-lipschitzienne.

3. Soit F un fermé d'un espace vectorel de dimension finie. Montrer que pour tout élément $\vec{a}$ de $\mathbf{E}$, il existe un élément $\vec{f}$ de $\mathbf{F}$ tel que $d(\vec{a}, F) = \|\vec{f} - \vec{a}\|$.

4. Théorème de Riestz. $\star\star$ Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel de dimension infinie n'est pas compact.

5. Darboux.$\star$ Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, dérivable.

   On note $T = \{(x,y) \in I^2, y < x\}$ et on considère

$$\psi \;:\; T \to \mathbf{R}\,;\; (x,y) \mapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

   Montrer que $\psi(T) \subset f'(I) \subset \overline{\psi(T)}$. en déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

6. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ l'est.

7. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe par arcs mais que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$ l'est.

8. (a) Soit A un connexe par arcs d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que toute partie de A relativement ouverte et fermée est soit A soit vide.

   (b) Soit U un ouvert d'un e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ connexe par arcs. Montrer que U est « connexe par lignes brisées ».

9. $\star$ Soit K un compact d'une e.v.n. $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$.

   (a) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que K est inclus dans la la réunion d'un nombre fini de boules centrées en des points de K et de rayon ε.

   (b) $\star\star$ Montrer que K possède une partie dense dénombrable.

10. $\star$ Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$.

11. $\star\star$ Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non inversible. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$ est connexe par arcs.

12. (Révision) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

13. (Révision) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

   (a) Montrer qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et A commutent si et seulement si M est un polynôme en A.

   (b) Montrer que l'ensemble des matrices éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec A est un espace vectoriel dont on précisera la dimension. Ce résultat serait-il vrai si A était diagonalisable à valeurs propres non toutes distinctes ?

14. (Révision) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n, nilpotent d'ordre n. Déterminer le commutant de f ainsi que sa dimension.

15. (Révision) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que pour tout réel strictement positif ε, il existe une matrice triangulaire supérieure $(t_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$, semblable à M, telle que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1,\dots,n\}$, $|t_{i,j}| \leq \varepsilon$.

    $\star$ Montrer que 0_n est adhérent à la classe de similitude de M si et seulement si M est nilpotente.

16. $\star$ Soit P un polynôme unitaire de $\mathbf{R}[X]$ de degré d. Montrer qu'il est scindé sur $\mathbf{R}[X]$ si et seulement si pour tout complexe z, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^d$. En déduire que l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices dont le polynôme caractéristique est scindé. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,
$$f(nx) \underset{n\to+\infty}{\to} +0$$
    (a) On suppose f uniformément continue. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} = 0$.
    (b) $\star\star$ On ne suppose plus f que continue.
        Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $F_n = \{x \in \mathbf{N}; \forall p \in \mathbf{N}, p \geq n \Longrightarrow |f(px)| \leq \varepsilon\}$.
        i. Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$, tel que $F_{\mathbf{N}}$ soit d'intérieure non vide.
        ii. Conclure.
    (c) Donner un exemple d'application f qui n'admet pas 0 comme limite en $+\infty$.

PROGRAMME DE l'INTERROGATION DE RENTRÈE

Au programme :
- devoir 0 de rentrée
    - exercice 1, question 1 & 2,
    - exercice 2, question 1 & 2 ;
- devoir maison 1 question 1,2 et 3 ;
- devoir surveillé numéro 1
    - partie I,
    - partie II, questions 1et 2 ;
- devoir surveillé numéro 2
    - partie I A,
    - partie I. B ;
- Colles
    - semaine 1, exercice 4 & 8,
    - semaine 2 exercice 6,
    - semaine 3 exercice 2,
    - semaine 4 exercice 2.

Correction de la question 12

Notons r le rang de A. On dipose donc de matrices inversibles P et Q telles que :

$$PAQ^{-1} = J_r.$$

Notons $C = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{A\}$ et $C' = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \cup \{J_r\}$. Par inversibilité de P et Q on a $C = \Phi(C')$, où

$$\Phi\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\ ;\ M \mapsto P^{-1}MQ.$$

Or l'application Φ est continue, bientôt on écrira « car linéaire en dimension finie » , aujourd'hui disons que ses composantes dans la base canonique sont polynomiales en les coordonnées de la variable dans la base canonique. Donc il suffit de prouver la connexité par arcs de C' pour avoir celle de C. Faisons.

On note $\mathcal{R}$ la relation définie sur C' ainsi : un élément M de C' est en relation avec un élément M' de C' si, par définition, il existe un chemin joignant M à M' de support inclus dans C'. Le cours affirme que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

D'abord $J_r \mathcal{R} \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -1)$. En effet l'application

$$\Gamma\ :\ [0, 1] \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\ ;\ t \mapsto \mathrm{diag}(I_r, tI_{n-r-1}, -tI_1)$$

relie J_r à $\mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -1)$, est continue (ses composantes dans la base canonique sont affines) et est à valeurs dans C', puisque $\Gamma(0) = J_r$ et que pour tout $t \in]0, 1]$ le déterminant de $\Gamma(t)$ vaut $-t^{n-r-1}$ et est donc non nul.

Ensuite sur le même principe on montre que $J_r \mathcal{R} I_n$.

Donc la clase d'équivalence pour $\mathcal{R}$ contient I_n et $\mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, -1)$ mais comme $\mathrm{GL}_n^{\pm}(\mathbf{R})$ est connexe par arcs, elle contient $\mathrm{GL}_n^{+}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{GL}_n^{+}(\mathbf{R})$ donc C' entier. Donc C' est connexe par arcs.

Donc C est bien connexe par arcs.

Programme de colles n$^{\text{O}}$8

25 Espaces vectoriels normés

Révisions !

— Normes, espaces vectoriels normés, distance à une partie non vide.
— Ouverts fermés, intérieurs adhérences. Ouverts et fermés relativement à une partie.
— Limite d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation de l'adhérence par les suites.
— Valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. Caractérisation des valeurs d'adhérence par les suites extraites.
— Limite et continuité d'une application d'une partie d'un e.v.n. à valeurs dans un e.v.n.
— Caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts (de fermés).
— Continuité uniforme, applications lipschitziennes.
— Compacité. Compacts, les compacts sont fermés bornés. Compacité des segments de $(\mathbf{R}|\cdot|)$.Compacts de $(\mathbf{K}^n, n_\infty)$. Image d'un compact par une application continue, théorème de Heine.
— Connexité par arcs : convexes, parties étoilées, composantes connexes par arcs, image par une application continue d'un connexe par arcs (théorème de la valeur intermédiaire).

26 Intégrale sur un intervalle quelconque

Il s'agit d'un premier contact les exercices doivent rester élémentaires.

— Intégrale convergente, absolument convergente, fonctions intégrables. L'absolue convergence assure la convergence.
— Théorèmes de comparaison,
— *à vanir : intégration des relations de comparaison, changement de variables et intégrations par parties dans une intégrale généralisée.*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

medskip

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

27 Récitation d'exercices

1. Soit C un convexe d'un e.v.n $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$. Montrer que l'intérieur et l'adhérence de C sont convexes.
2. $\star\star$ Soient X un convexe de $\mathbf{R}^n$ non vide, a un point intérieur à X et b un point adhérent à X. Montrer que $[a, b[$ est inclus dans l'intérieur de X.
   Indication : Étudier pour un point x de $[a, b[$ l'image d'une boule de centre a par une homothétie de centre x.

3. Soient un entier $n \geq 2$ et une application f de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ continue.
   (a) On suppose qu'il existe un réel a tel que $f^{-1}(\{a\})$ soit un singleton. Montrer que f atteint en $f^{-1}(\{a\})$ son maximum ou son minimum.
   (b) On supose qu'il existe un réel b tel que $f^{-1}(\{b\})$ soit compact. Montrer que f atteint son maximum ou son minimum.
4. — PROJECTION SUR UN CONVEXE —
   (a) Soit C un convexe non vide fermé de $\mathbf{R}^n$, muni de sa structure euclidienne canonique. Soit z un élément de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe un et un seul point c de C tel que : $\|z - c\| = \mathrm{d}(c, C)$. Le point c sera noté $p(z)$.

   (b) Soit y un élément de C, montrer que : $\langle y - p(z) \mid z - p(z) \rangle \leq 0$.

   (c) $\star$ Soient a et b des éléments de $\mathbf{R}^n$. Montrer que : $\|p(a) - p(b)\| \leq \|a - b\|$.
5. $\star$ On garde le cadre de l'exercice précédent. On appelle hyperplan d'appui de C en un point a de C tout hyperplan $\mathbf{H}$ de $\mathbf{R}^n$ passant par a tel que C soit inclus dans un des demi-espaces fermés définis par $\mathbf{H}$.
   (a) On suppose que z n'appartient pas à C. Montrer que C admet en $p(z)$ un hyperplan d'appui
   (b) Montrer que $p(\mathbf{R}^n - C) \subset \mathrm{Fr}(C)$
   (c) Soit f un point de la frontière de C. Montrer que C admet en f un hyperplan d'appui.

6. $\star\star$ On garde le cadre de la question précédente.

   Un point a de C est dit extrémal si $C - \{a\}$ est convexe, autrement dit si a n'est pas le milieu de deux points distincts de C.

   Montrer que C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (Théorème de Krein-Milman).
7. (a) On appelle enveloppe convexe d'une partie A non vide d'un espace vectoriel normée $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, notée $\mathrm{conv}(A)$ l'intersection de tous les convexes inclus contenant A, c'est donc le plus petit convexe contenant A (on fera un dessin). Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de points de A.
   (b) $\star$ On suppose $\mathbf{E}$ de dimension n. Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de $n+1$ points de A (on illustrera la preuve par une figure). Montrer que si A est compact alors $\mathrm{conv}(A)$ est compact. Donner un exemple de partie A fermée telle que $\mathrm{conv}(A)$ ne le soit pas.

8. Étudier la convergence de l'intégrale suivante : $\int_0^{+\infty} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$.
9. Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.
   (a) Déterminer le domaine de définition D de Γ.
   (b) Donner pour tout $x \in D$ une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

      En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier n élément de D.

(c) ⋆⋆ Égalité des accroissements finis vectorielle

Soit F une application d'une application d'un intervalle ouvert I non vide à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soient a et b des éléments de I tels que $a < b$. Notons d la dimension de l'espace affine engendré par $F([a, b])$. Alors il existe c_1, c_2,...,c_{d+1} des éléments de $[a, b]$, λ_1, λ_2,...,λ_{d+1} des réels positifs ou nuls de somme 1, tels que

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i F(c_i).$$

Programme de colles n$^{\rm O}$9

28 Révision sur les calculs de primitives

29 Intégrale sur un intervalle quelconque

- Intégrale convergente, absolument convergente, fonctions intégrables. L'absolue convergence assure la convergence.
- Théorèmes de comparaison, intégration des relations de comparaison.
- Changement de variables et intégrations par parties dans une intégrale généralisée.
- Théorème de comparaison série/intégrale.
- *À venir Espace vectoriels normés ch. III (Applications linéaires continues, normes équivalentes, espace de dimension finie).*

Les questions de cours ou exercices avec un astérisque $\star$ pour : Gaël Le Guest, Ajyad Hassani, Sacha Le Roux, Gwennolé Traon, Alex Zeitler, Elouan Laliberté, Noah Tousch, Augustin Ravasse, Titouan Renault-Even, Cyril Brévignon.

medskip

Les questions de cours ou exercices avec deux astérisques $\star\star$ Gwennolé Traon, Alex Zeitler.

30 Question de cours

1. Soient ϕ et ψ des applications de $[a, b[$ dans $\mathbf{R}$, à valeurs positives. On suppose que $\phi(t) = \underset{t \to b}{\mathrm{o}}(\psi(t))$ et que ϕ est non intégrable. Alors ψ est non intégrable et
$$\int_a^x \phi(t)\mathrm{d}t = \underset{x \to b}{\mathrm{o}}\left(\int_a^x \psi(t)\mathrm{d}t\right).)$$

31 Exercices

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'application
$$f_n \ :]0,1[\to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$$
est intégrable (sommable).
   (b) Pour tout entier naturel n,on pose $I_n = \int_{]0,1[} f_n$. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_{n-1} - I_n = \frac{3}{4n-3} I_n$.
   (c) Calculet I_0 et en déduire l'expression de I_n pour tout entier naturel n.
2. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,
$$P_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^k\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

ou version $\star$

Soit f une application d'un segment $[a,b]$, non réduit à un point, à valeurs réelles, dérivable et dont la dérivée est continue par morceaux. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$J_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right) f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

3. Montrer la convergence et donner la valeur des l'intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-t)-\exp(-2t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\,;\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-t)-\exp(-2t)}{t}\mathrm{d}t$$

4. (a) Soit g une application d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\int_a^b g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) $\star$ à la place de (a).
   Soient h une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, T-périodique et $< h >= \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\mathrm{d}t$.
   Montrer que $\int_a^b g(t)h(nt)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < h > \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer des équivalents simples, lorsque x tend vers $+\infty$, des quantités suivantes : $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^c}\,\mathrm{d}t$, pour c élément de $]1,+\infty[$, $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t, \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.
   $\star$ Donner un développement asymptotique à tout ordre de $\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$, lorsque x tend vers $+\infty$.
6. $\star\star$ Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable.
   (a) Montrer que f n'est pas nécessairement bornée.
   (b) On supose de plus que f' est de carré intégrable (sur $\mathbf{R}_+$). Montrer que f est bornée.
7. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, continue et bornée. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Pour tout entier naturel n, justifier l'existence de $J_n = n\int_0^{+\infty} e^{-n^2t^2} f\,(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer, par un raisonnement élémentaire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite à déterminer.
   (b) (5/2) Reprendre la question précédente en utilisant le théorème de convergnce dominée.
8. $\star\star$ (à la place de 8.) Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continue, tendant vers 0 en $\pm\infty$. Soit K une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continue, à valeurs positives, nulle en dehors d'un segment et tel que $\int_{\mathbf{R}} K = 1$.
   Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $K_n = nK(n\cdot)$ et : $K_n \star f \;:\; \mathbf{R}\to\mathbf{R}\;;\, x\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)K_n(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que la suite $(K_n\star f)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f, c'est-à-dire que :
   $$\|K_n\star f - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$
   (b) On suppose de plus K indéfiniment dérivable. Etudier la régularité de $K_n\star f$.
   (c) Existe-t-il vraiment une telle application K ?

9. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, à valeurs positives ou nulles, continue. On suppose f intégrable.
   (a) $\star$ A-t-on $\lim\limits_{+\infty} f = 0$?
   (b) On suppose de surcroît f décroissante. Montrer que $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Cette dernière condition suffit-elle à prouver l'intégrabilité de f ?
   (c) Énoncer et prouver un résultat analogue pour une série à termes positifs.
   (d) $\star\star$ On ne suppose plus f décroissante. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels qui tend vers $+\infty$ telle que : $x_n f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
   En déduire que pour tout application g de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, et de carré intégrable,
$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} x^2 g^2(x)\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} g'^2(x)\mathrm{d}x} \leq +\infty$$

10. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer I_2 et I_3.
   (b) Donner la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   (c) Donner un développement limité à l'ordre 2, en $\frac{1}{n}$ de I_n, lorsque n tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire une expression de la forme $I_n = a_0 + a_1\frac{1}{n} + a_2\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $(n \to \infty)$).
   (d) Exprimer pour tout entier naturel n, I_n comme la somme d'une série numérique.

11. $\star$ — Inégalité de Hardy —
   (Inégalité de Hardy faible).
   Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ Pour tout $x \in]0,1]$, $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F(0) = f(0)$. Montrer que :
$$\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}x \leq 4\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

12. $\star$ Soit f un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$. On suppose que f et f'' sont de carrés sommables. Montrer que f' est de carré sommable.