

DM n°1 facultatif

Devoir de vacances supplémentaire à l'usage des futurs $\frac{5}{2}$ préparant Centrale ou les Mines. Ce devoir est long et facile, il a le mérite de faire une bonne révision du programme d'algèbre linéaire de MPSI, il est abordable par les plus téméraires des futurs $\frac{3}{2}$.

TRANSVEXIONS, AUTOMORPHISMES DE $\mathcal{L}(\mathbf{E})$

Notations

- Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2,
- \mathcal{M}_n désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels,
- Pour tout élément M de \mathcal{M}_n et tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on désigne par $m_{i,j}$ le coefficient de M situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.
- GL_n désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels inversible,
- SL_n désigne l'ensemble des éléments de GL_n de déterminant 1.
- \mathbf{E} désigne un espace vectoriel sur le corps \mathbf{R} des nombres réels, de dimension n ,
- \mathbf{E}^* désigne le dual de \mathbf{E} .
- $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ désigne une base de \mathbf{E} et (e_1^*, \dots, e_n^*) désigne sa base duale, c'est-à-dire que e_i^* est la i^{e} forme coordonnée dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, pour $i = 1, \dots, n$.
- $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ désigne l'algèbre des endomorphismes de \mathbf{E} ,
- $\text{GL}(\mathbf{E})$ désigne le groupe des automorphismes de \mathbf{E} ,
- id désigne l'application identité sur \mathbf{E} ,
- Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, $E_{i,j}$ est l'élément de \mathcal{M}_n dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui situé sur la i^{e} ligne et j^{e} colonne,
- Pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$ et tout réel λ non nul, $T_{i,j}(\lambda)$ désigne la matrice de transvection, $I_n + \lambda E_{i,j}$,
- Pour a_1, a_2, \dots, a_n des réels, $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ désigne la matrice diagonale dont le terme sur la i^{e} ligne et la i^{e} colonne est $a_{i,i}$, pour $i = 1, \dots, n$.

Partie I

GÉNÉRATEURS DE $\text{SL}_n(\mathbf{R})$

1. (a) Pour tout élément (i, j, h, k) de $\{1, \dots, n\}^4$, calculer le produit matriciel $E_{i,j}E_{h,k}$.
 (b) Soient (i, j) et (h, k) des couples d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$ et λ et μ des réels non nuls. Calculer le produit matriciel $T_{i,j}(\lambda)T_{h,k}(\mu)$.
 En déduire l'inversibilité et l'inverse de $T_{i,j}(\lambda)$.
2. Soient (i, j) un couple d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, λ un réel non nul et A un élément de \mathcal{M}_n . Pour tout élément k de $\{1, \dots, n\}$ C_k désigne la k^{e} colonne de A et L_k sa k^{e} ligne.
 - (a) Montrer que la matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ se déduit de A par une transformation élémentaire portant sur les colonnes de A que l'on précisera.
 - (b) Donner un résultat analogue pour $T_{i,j}(\lambda)A$.

3. Soit A un élément de \mathcal{M}_n . On suppose que la première colonne ou la première ligne de A possède un élément non nul.

Montrer qu'il existe deux éléments P et Q de \mathcal{M}_n , produits de matrices de transvections tels qu'en posant

$$B = PAQ,$$

- i. $b_{1,1} = 1$;
- ii. $b_{i,1} = 0$, pour $i = 2, \dots, n$;
- iii. $b_{1j} = 0$, pour $j = 2, \dots, n$.

Indication : On pourra envisager pour commencer le cas où $a_{1,1} = 1$.

4. Soit A un élément de \mathcal{M}_n de rang non nul r . Montrer qu'il existe deux éléments R et S de \mathcal{M}_n , produits de matrices de transvections tels que : RAS soit diagonale égale soit à r termes

$\text{diag}(\overbrace{1, 1, \dots, 1}, r, 0 \dots 0)$, soit à $\text{diag}(1, 1, \dots, 1, d)$, avec $d = \text{Det}(A)$, suivant que $r < n$ ou $r = n$.

Indication : Le candidat a le choix entre démontrer ce résultat par récurrence, ou écrire en français un algorithme qui construit les matrices R et S .

5. (a) Montrer que SL_n est un sous-groupe de GL_n .
 (b) Dédurre de la question 4. que l'ensemble \mathcal{T} des matrices de transvection d'ordre n engendre le sous groupe SL_n .

6. PETIT THÉORÈME DE FROBENIUS ZOLOTAREV —

On suppose dans cette question et seulement dans cette question que $n \geq 3$. Soit f une application de \mathcal{M}_n dans \mathbf{R} telle que :

- i. Pour tout couple (A, B) d'éléments de \mathcal{M}_n , $f(AB) = f(A)f(B)$;
- ii. Pour tout élément A de \mathcal{M}_n diagonal, $f(A)$ est le produit des termes diagonaux.

- (a) Donner un exemple d'une telle application.
 (b) Soient a un réel non nul et (α, β) un couple d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$. Evaluer

$$(I_n + 1 \cdot E_{\alpha,j})(I_n + aE_{j,\beta})(I_n + 1 \cdot E_{\alpha,j})^{-1}(I_n + aE_{j,\beta})^{-1}.$$

- (c) Calculer l'image par f d'une matrice T de transvection.
 (d) Déterminer f .

Une forme forte du théorème de Frobenius-Zolotarev est la détermination des morphismes de $(\text{GL}_n(\mathbf{C}) \circ)$ dans (\mathbf{C}^, \times) , voir exercices d'algèbre linéaire.*

Partie II

CARACTÉRISATION DE LA TRACE

1. Vérifier que l'application trace

$$\text{Tr} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbf{R}, ; M \mapsto \text{Tr}(M)$$

est une forme linéaire, et que pour tout couple (A, B) d'éléments de \mathcal{M}_n ,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

2. Soit σ une forme linéaire sur \mathcal{M}_n telle que pour tout couple (A, B) d'éléments de \mathcal{M}_n , $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

- (a) Montrer que pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, $\sigma(E_{i,j}) = 0$.

- (b) Montrer que pour tout élément i de $\{1, \dots, n\}$, $\sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{1,1})$.
- (c) Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\sigma = \lambda \text{Tr}$.
3. Soient \mathcal{C} le sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_n engendré par les matrices de la forme $AB - BA$, avec A et B des éléments de \mathcal{M}_n ,

$$\mathcal{C} = \text{vect}((AB - BA)_{(A,B) \in \mathcal{M}_n^2}),$$

et \mathcal{H} la droite vectorielle de \mathcal{M}_n engendré par id .

- (a) Montrer que \mathcal{C} est inclus dans le noyau de Tr .
- (b) Exhiber une famille libre de \mathcal{C} de cardinal $n^2 - 1$.
Indication : on pourra considérer la base canonique de \mathcal{M}_n .
- (c) Montrer que $\mathcal{C} = \text{Ker}(\text{Tr})$ et que $\mathcal{M}_n = \mathcal{C} \oplus \mathcal{H}$.
4. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$. Soient (i, j) un couple d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ et (h, k) un couple d'éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, calculer le produit matriciel $F_{h,k}^{-1} F_{i,j} F_{h,k}$.
5. Soit θ une forme linéaire sur \mathcal{M}_n tel que pour tout élément A de \mathcal{M}_n et tout élément B de GL_n ,

$$\theta(AB) = \theta(BA).$$

Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\theta = \lambda \text{Tr}$.

Partie III

AUTOMORPHISMES DE L'ALGÈBRE $\mathcal{L}(\mathbf{E})$

On appelle automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, tout morphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dans elle-même qui est bijectif. L'ensemble des automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ sera noté $\mathcal{AUT}(\mathbf{E})$, on admet, fait trivial, que $\mathcal{AUT}(\mathbf{E})$ est un sous-groupe du groupe des permutations de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$. Pour tout élément g de GL_n , on désigne par A_g l'application de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ qui à un élément u associe $g \circ u \circ g^{-1}$,

$$A_g : \mathcal{L}(\mathbf{E}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{E}); u \mapsto g \circ u \circ g^{-1}.$$

1. (a) Montrer que pour tout élément g de GL_n , A_g est un automorphisme de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, un tel automorphisme est dit intérieur.

Montrer que

$$\chi : \text{GL}_n \rightarrow \mathcal{AUT}(\mathbf{E}); g \mapsto A_g$$

est un morphisme du groupe $\mathcal{GL}(\mathbf{E})$ dans le groupe $\mathcal{AUT}(\mathbf{E})$. L'application χ est elle injective ?

2. (a) Soit g un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ tel que pour tout élément \vec{x} de \mathbf{E} , la famille $(x, g(x))$ soit liée. Montrer que g est élément de \mathcal{H} .

(b) Dédurre de la sous-question précédente le noyau de χ .

3. Soit (ϕ, \vec{x}) un élément de $\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}$, on définit l'application

$$u_{\phi, \vec{x}} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}; \vec{y} \mapsto \phi(\vec{y})\vec{x}.$$

On admettra, résultat évident, qu'une telle application est un endomorphisme.

- (a) Déterminer l'image et le noyau de $u_{\phi, \vec{x}}$.
- (b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (ϕ, \vec{x}) pour que $u_{\phi, \vec{x}}$ soit un projecteur non nul.

4. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, on pose $u_{i,j} = u_{e_j^* \bar{e}_i}$.
- (a) Soient i, j, h, k des éléments de $\{1, \dots, n\}$. Calculer $u_{i,j} \circ u_{h,k}$.
- (b) Que peut-on dire de la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in \{1,n\}^2}$
5. Soit \mathcal{P} l'ensemble des projecteurs non nuls de \mathbf{E} . On définit sur \mathcal{P} la relation \prec par, pour tout p et tout q éléments de \mathcal{P} , $p \prec q$ si $p = p \circ q = q \circ p$.
- (a) Montrer que la relation \prec est une relation d'ordre sur \mathcal{P} . Est-ce une relation d'ordre totale ?
- (b) On appelle élément minimal de \mathcal{P} pour la relation \prec , tout élément p de \mathcal{P} tel que pour tout élément q de \mathcal{P} , si $q \prec p$ alors $q = p$.
Soit p un élément de \mathcal{P} . Etablir l'équivalence des énoncés suivants :
- p est de rang 1 ;
 - p est un élément minimal de \mathcal{P} pour la relation \prec ;
 - Il existe un élément (ϕ, \vec{x}) de $\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}$ tel que : $p = u_{\phi, \vec{x}}$ et $\phi(\vec{x}) = 1$.
6. Soient A un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ et p un élément de \mathcal{P} .
- (a) Montrer que $A(p)$ est un projecteur.
- (b) On suppose que p est un élément minimal de \mathcal{P} pour la relation \prec . Montrer $A(p)$ est encore un élément minimal de \mathcal{P} pour la relation \prec .
- (c) En déduire qu'il existe une famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ d'éléments de \mathbf{E} et une famille $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ d'éléments de \mathbf{E}^* telle que, pour tout élément i de $\{1, \dots, n\}$:
- $\phi_i(\vec{e}_i) = 1$;
 - $A(u_{i,i}) = u_{\phi_i, \vec{e}_i}$.
- (d) Calculer pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, $\phi_i(\vec{e}_j)$.
Que peut-on en déduire sur les familles $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et (ϕ_1, \dots, ϕ_n) ?
7. Soit un couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$.
- (a) pour tout élément k de $\{1, \dots, n\}$ distinct de j calculer $A(u_{i,j}) \circ u_{\phi_k, \vec{e}_k}$.
En déduire le rang et le noyau de $A(u_{i,j})$.
- (b) Calculer $A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i})$. En déduire l'image de $A(u_{i,i})$.
- (c) Montrer qu'il existe un réel non nul $\lambda_{i,j}$ tel que : $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j} u_{\phi_j, \vec{e}_i}$
8. Soient i, j et k des éléments de $\{1, \dots, n\}$. Montrer que $\lambda_{i,j} \lambda_{j,k} = \lambda_{i,k}$.
En déduire que $\lambda_{i,j} = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.
9. (a) Montrer qu'il existe une base $(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n)$ de \mathbf{E} , telle que si $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ désigne sa base duale, alors, pour tout élément (i, j) de $\{1, \dots, n\}$,

$$A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*, \vec{\alpha}_i}.$$

- (b) Posons g l'automorphisme de \mathbf{E} qui envoie la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sur la base $(\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n)$, alors A et A_g coïncident sur la base $(u_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$, d'après (a), donc $A = A_g$.
- (c) Tout automorphisme de \mathcal{L} est intérieur.

* *

*