DM bis n$^{\text{o}}$2

DIAMÈTRE TRANSFINI D'UNE PARTIE DU PLAN

Soit Π un espace affine euclidien orienté de dimension 2. Il sera appelé brièvement *plan* Π. La distance de deux points A et B de Π est notée $d(A, B)$.

Une partie de Π désignée par la lettre E, avec ou sans indice, est un sous-ensemble de Π contenant une infinité de points. Les différentes figures géométriques considérées — segment, cercle — sont supposées posséder elles aussi cette propriété.

Soit un entier $n \geq 2$, et une partie E du plan Π ; pour toute suite finie de points de la partie E : $P_1, P_2, ..., P_n$, on note $g_n(P_1, P_2, ..., P_n)$ la moyenne géométrique des distances mutuelles de ces points, c'est-à-dire :

$$g_n(P_1, P_2, \dots, P_n) = \left(\prod_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,n, i\neq j} d(P_i, P_j) \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} = \left(\prod_{1\leq i<j\leq n} d(P_i, P_j) \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

Considérons maintenant l'ensemble des réels $g_n(P_1, P_2, ..., P_n)$ définis pour toute suite de points $P_1, P_2, ..., P_n$; si cet ensemble est borné, la borne supérieure de ces réels sera designée par $\delta_n(E)$:

$$\delta_n(E) = \sup\{g_n(P_1, P_2, ..., P_n) | P_i \in E, 1 \leq i \leq n\} ;$$

si au contraire cet ensemble de réels n'est pas borné, on convient que $\delta_n(E)$ est égal à $+\infty$.

Préliminaires

Nous allons démontrer deux résultats utiles dans la suite.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réel. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, par :

$$v_n = \frac{1u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2},$$

pour tout entier $n \geq 1$.

On suppose que la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $\frac{\ell}{2}$.

2. Soient n un élément de $\mathbf{N}^*$, $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes et U un polynôme unitaire de degré n. Donner la valeur du déterminant suivant, valeur qui ne dépend pas de U :

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ U(z_1) & U(z_2) & \dots & U(z_{n+1}) \end{vmatrix}.$$

Partie I

Quelques propriétés générales et exemples

1. (a) Montrer que si **E** est une partie bornée du plan $\delta_2(E) = \sup\{d(A,B) | A \in E, B \in E\}$.

   Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\delta_n(E)$ est fini et majoré par $\delta_2(E)$.

   (b) Soient deux parties E_1 et E_2 du plan telles que E_1 soit contenue dans E_2. Etablir pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité :

   $$\delta_n(E_1) \leq \delta_n(E_2).$$

   (c) Démontrer que si un sous-ensemble E de Π n'est pas borné, il existe pour tout réel $\rho > 0$ et tout entier $k \geq 2$, une suite finie de points $(P_1, P_2, ...P_k)$ de Π telle que pour tout couple (i,j) d'élément de $\{1 \dots k\}$ distincts, la distance de P_i à P_j soit supérieure ou égale à ρ : $d(P_i, P_j) \geq \rho$. En déduire que si E est non borné, alors ; pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\delta_n(E)$ est infini.

   (d) Soit une partie E du plan Π ; soit $\bar{E}$ l'adhérence de E. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2

   $$\delta_n(E) = \delta_n(\bar{E}).$$

2. Soient A et B des points de Π distincts. On désigne par I le segment $[A, B]$ et par a la longueur de I.

   Soient P_1 et P_3 des points de I. Montrer qu'il existe un point P_2 de $[P_1, P_3]$ tel que $g_3(P_1, P_2, P_3) = \max\{g_3(P_1, P, P_3)\}, P \in [P_1, P_3]\}$.

   En déduire $\delta_3(I)$.

3. Soient O un point de Π et C_R un cercle de centre O et de rayon R. Soit un repère orthonormé et direct $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ et trois points du cercle C_R, définis par leurs angles polaires, égaux respectivement à 0, θ et ϕ. :

   $$0 = (\vec{i}, \overrightarrow{0P_1})\ \theta = (\vec{i}, \overrightarrow{0P_2})\ \varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{0P_3})\ , 0 < \theta < \phi < 2\pi.$$

   (a) Montrer que φ étant fixé, $g_3(P_1, P_2, P_3)$ est maximum pour $\theta = \frac{\varphi}{2}$.

   (b) Pour quelles valeurs de φ et de θ, $g_3(P_1, P_2, P_3)$ est-il maximum .

   (c) Déduire des sous-questions précédente $\delta_3(C_R)$.

Partie II

Étude de la suite $(\delta_n(E))_{n\geq 2}$

1. Soient E une partie bornée de Π et un entier $n \geq 2$.

   (a) Soit une suite de $n+1$ points de E, $(P_1, P_2, ..., P_{n+1})$. Démontrer la relation :

   $$(g_{n+1}(P_1, P_2, \dots, P_{n+1}))^{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} g_n(P_1, \dots \cancel{P_i} \dots, P_{n+1}),$$

   où pour $i = 1, \dots, n+1$, $g_n(P_1, \dots \cancel{P_i} \dots, P_{n+1})$ désigne $g_n(P_1, P_2, \dots P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_{n+1})$.

   (b) En déduire que $\delta_{n+1}(E) \leq \delta_n(E)$, puis montrer que la suite $(\delta_k(E))_{k\geq 2}$ converge. On notera $\Delta(E)$ sa limite.

2. Soit un entier $n \geq 2$.

(a) Soient z_i, $i = 0, 1, ..., n-1$ les n racines n^{e} de l'unité. Démontrer que pour tout : élément k de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$\prod_{j=0,\ldots,n-1,\ j\neq k} (z_k - z_j) = n(z_k)^{n-1}.$$

(b) Calculer, lorsque les points $P_1, P_2, \ldots, ..., P_n$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle C_R de rayon R, la valeur de $g_n(P_1, P_2, ..., P_n)$.

(c) En déduire pour $E = C_R$, que la limite $\Delta(E)$ de la suite $(\delta_k(E))_{k\geq 2}$ est différente de 0.

Montrer que :

$$R \leq \Delta(E) \leq \sqrt{3}R.$$

Partie III
ÉTUDE DE LA SUITE $(\delta_n(E))_{n\geq 2}$

L'objet de cette partie et de relier $\Delta(E)$ à un réel $\mu(E)$ défini à l'aide de valeurs prises par des polynômes.

On considère un repère orthonormé direct $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan Π. A chacun des points P du plan Π on peut alors associé un nombre complexe : l'affixe de P.

Soit E une partie bornée de Π. On note $\mathcal{E}$, l'ensemble des affixes des points de E.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes complexes unitaires U de degré n.

1. (a) Justifier, pour tout polynôme complexe unitaire U, l'existence de la quantité

$$S(E, U) = \sup\{|U(z)|, z \in \mathcal{E}\}.$$

Justifier pour tout entier $n \geq 1$ l'existence de la quentité

$$\sigma_n(E) = \inf\{S(E, U), U \in \mathcal{U}_n\}.$$

(b) On admet que $\sigma_n(E)$ ne dépend pas du choix du repère $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$. Oon pose

$$\mu_n(E) = \sigma_n^{\frac{1}{n}}(E).$$

Déterminer deux réels a et b strictement positifs tels que :

$$a\sigma_1(E) \leq \delta_2(E) \leq b\sigma_1(E).$$

2. CAS D'UN SEGMENT

Soit I le segment fermé joignant les points A et B de coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. L'intervalle $[-1, 1]$ sera identifié à $[A, B]$ et également désigné par I.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note T_n l'application

$$T_n \ : \ I \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos(x)).$$

(a) Montrer que pour tout $x \in I$,

$$T_{n+2}(x) = xT_{n+1}(x) - \frac{1}{4}T_n(x).$$

Indication : on pourra calculer $2^{n+1}T_{n+2} + 2^{n-1}T_n$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, T_n est une application polynômiale sur I, on note encore T_n le polynôme associé.

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme T_n est unitaire de degré n.

Déterminer le maximum de l'application T_n sur I.

(c) Soit U un polynôme unitaire de degré n.

Montrer l'existence de $M_U = \max\{U(x) | x \in I\}$.

le but des sous-questions suivantes et d'établir que $M_U \geq \frac{1}{2^{n-1}}$

(d) Supposons que U soit réel et tel que, pour tout $x \in I$, :

$$|U(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{1}$$

Déterminer les signes des valeurs prises par le polynôme $U - T_n$ aux points x_k définis pour $k = 0, 1, \ldots, n$, par : $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. En déduire que l'hypothèse (1) est fausse.

(e) On ne suppose plus que U est réel. Démontrer que $M_U \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

(f) En déduire la valeur de $\mu_n(I)$. Démontrer que la suite $(\mu_k(I))_{k\in\mathbf{N}^*}$ admet une limite notée $\mu(I)$ à déterminer.

Nous repassons au cas général.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que pour tout couple (p, q) d'entiers strictements positifs,

$$u_{p+q}^{p+q} \leq u_p^p u_q^q. \tag{2}$$

(a) Montrer que pour tout k et tout p, entier strictement positifs, $u_{kp} \leq u_p$.

(b) Etablir l'existence de $\ell = \inf\{u_n | n \in \mathbf{N}^*\}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.

Indication : on rappelle que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\ell \leq u_p < \ell + \varepsilon$$

et que tout entier n s'écrit de manière unique $n = pq + r$, avec $0 \leq r < p$.

(c) Soit E une partie bornée du plan Π. Montrer que pour tout couple (p, q) d'éléments de $\mathbf{N}^*$,

$$\sigma_{p+q}(E) \leq \sigma_p(E)\sigma_q(E).$$

(d) Soit $\mu(E)$ la borne inférieure de $\{\mu_n(E) | n \in \mathbf{N}^*\}$ Démontrer que la suite $(\mu_n(E))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et de limite $\mu(E)$.

Vérifier cette propriété sur l'exemple du segment traité en 2.

4. Soient E une partie bornée du plan et n un entier strictement possitif. On utilisera dans ce qui suit la question préliminaire sur le calcul de V.

(a) Montrer que :

$$\delta_{n+1}(E)^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq (n+1)\delta_n(E)^{\frac{n(n-1)}{2}}\mu_n(E)^n.$$

(b) Montrer que :

$$\delta_n(E)^{\frac{n(n-1)}{2}}\mu_n(E)^n \leq \delta_{n+1}(E)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Indication : on pourra considérer le polynôme $U_0 = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$

5. E désigne toujours une partie bornée du plan.

(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mu_n(E) \leq \delta_{n+1}(E)$.

(b) Donner pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, un majorant de δ_{n+1} en fonction de $\mu_1(E), \mu_2(E), \ldots, \mu_n(E)$ et de n.

(c) Démontrer que $\Delta(E) = \mu(E)$.

⋆ ⋆

⋆

Correction du Dm n°2 bis

Préliminaire

1. Mais c'est Cesàro ! Définissons la suite des moyennes de u_n $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : $w_n = \frac{1u_1+2u_2+\cdots+u_n}{1+2+\cdots+n}$ pour tout entier $n \geq 1$; notons que $w_n = \frac{1u_1+2u_2+\cdots+u_n}{\frac{n(n+1)}{2}}$..

   On a $w_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$ en effet...

   Là, soit on refait la preuve vue en T.D., soit on utilise les théorèmes de comparaisons sur les séries que nous allons voir prochainement.

   Or pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} w_n$ et comme $\frac{n(n+1)}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$,

$$\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\ell}{2}}$$

2. Notons plutôt le déterminant V, V_U. Le polynôme U unitaire de degré n s'écrit

$$X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_i X^i,$$

   avec $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$ des complexes, et donc en effectuant sur les lignes de V_u la transformation :

$$L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a_i L_{i+1},$$

   où L_i désigne la i^{e} ligne de V_U, pour $i = 1, \dots, n+1$, on obtient :

$$V_U = V_{X^n}.$$

   V ne dépend donc pas de U, notons à présent $V(n)$ sa valeur. En particulier $V(n) = V_P$, où $P = \prod_{i=1}^{n}(X - z_i)$, soit

$$V(n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ P(z_1) & P(z_2) & \dots & P(z_{n+1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n+1} \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \prod_{i=1}^{n}(z_{n+1} - z_i) \end{vmatrix}.$$

   Par développement par rapport à la dernière ligne, on obtient

$$V(n) = \prod_{i=1}^{n}(z_{n+1} - z_i) V(n-1).$$

   On montre alors par récurrence descendante que :

$$\boxed{V(n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(z_j - z_i)}.$$

Première partie

1. (a) E est bornée il existe donc $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $E \in \mathrm{B_f}(O, \mathbf{R})$, boule fermée de centre O de rayon R. Pour tout A et tout B points de E,

$$g_2(A, B) = d(A, B) \leq d(A, O) + d(O, B) = 2R.$$

Donc $\{g_2(A, B), A \in E, B \in E\}$, ensemble non vide ($E \neq \emptyset$), majoré par $2R$, admet une borne supérieure. Finalement

$$\delta_2(E) = \sup \{d(A, B), A \in E, B \in E\} < +\infty.$$

Soit $n \geq 2$. Quels que soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ points de E,

$$g_n(P_1, \ldots, P_n) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} d(P_i, P_j)\right)^{2/n(n-1)} \leq \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \delta_2(E)\right)^{2/n(n-1)} = \delta_2(E),$$

ce, parce que la borne supérieure est un *majorant* et par croissance de $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ s \mapsto s^{2/n(n-1)}$. Donc $\delta_2(E)$ majore $\{g_n(P_1, \ldots, P_n), P_i \in E, 1 \leq i \leq n\}$. La borne supérieure étant le *plus petit* majorant, $\boxed{\delta_n(E) \leq \delta_2(E)}$

(b) Supposons $\delta_n(E_2) < +\infty$.
$\{g_n(P_1, \ldots, P_n), P_i \in E_1, 1 \leq i \leq n\} \subset \{g_n(P_1, \ldots, P_n), P_i \in E_2, 1 \leq i \leq n\}$. Donc la borne supérieure étant un majorant, $\delta_n(E_2)$ majore $\{g_n(P_1, \ldots, P_n), P_i \in E_1, 1 \leq i \leq n\}$. La borne supérieure étant le *plus petit* des majorants,

$$\sup \{g_n(P_1, \ldots, P_n), P_i \in E_1, 1 \leq i \leq n\} \leq \delta_n(E_2).$$

Soit finalement $\boxed{\delta_n(E_1) \leq \delta_n(E_2)}$
Cette inégalité évidente pour $\delta_n(E_2) = +\infty$.

(c) Supposons E non borné. Soit O un point de E.
Soit $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ Notons, pour tout entier $k \geq 2$, $(\mathrm{P_k})$ La propriété suivante : Il existe $P_1, P_2, \ldots, P_k$ des éléments de E tels que pour tout i et tout j éléments distincts de $\{1, \ldots, k\}$, $d(P_i, P_j) \geq \rho$.

- $(\mathrm{P_2})$ *est vrai* :
Soit P_1 un point de E. E étant non bornée, E n'est pas inclus dans la boule ouverte $\mathrm{B_o}(P_1, \rho)$. Donc il existe un élément P_2 de E distant de P_1 de ρ ou plus, d'où $(\mathrm{P_2})$.
- *Soit un entier $n \geq 2$. Supposons* $(\mathrm{P_n})$. *Montrons* $(\mathrm{P_{n+1}})$:
D'après $(\mathrm{P_n})$, On dispose de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ des éléments de E tels que pour tout i et tout j éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$, $d(P_i, P_j) \geq \rho$. Posons $R = \max\{d(O, P_i), i = 1 \ldots n\} + \rho$[1]. E étant non bornée, E n'est pas inclus dans la boule ouverte $\mathrm{B_o}(O, R)$. Donc il existe un élément de E, noté P_{n+1}, dans le complémentaire de cette boule. Pour tout élément i de $\{1, \ldots, n\}$,

$$d(P_{n+1}, P_i) \geq d(P_{n+1}, O) - d(O, P_i) \geq R + \rho - R = \rho.$$

Les points $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$ vérifient donc $(\mathrm{P_{n+1}})$.
- Par récurrence, on a prouvé que pour tout entier $k \geq 2$, $(\mathrm{P_k})$ est vraie.

1. faites un dessin !

Ceci assure puisque ρ est quelconque le résultat.

Supposons toujours E non borné.

Soit un entier $n \geq 2$. Soit $\rho \in \mathbf{R}_+^*$. D'après la première partie de la question il existe $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ des éléments de E tels que pour tout i et tout j éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, $d(Q_i, Q_j) \geq \rho$. On a, par croissance de $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ s \mapsto s^{2/n(n-1)}$,

$$g_n(Q_1, \dots, Q_n) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} d(Q_i, Q_j) \right)^{2/n(n-1)} \geq \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \rho \right)^{2/n(n-1)} = \rho.$$

ρ étant quelconque l'ensemble (non vide) $\{g_n(P_1, \dots, P_n), P_i \in E, 1 \leq i \leq n\}$ n'est pas majoré, donc $\boxed{\delta_n(E) = +\infty}$

(d) *Ah une question dure!*

- Comme $E \subset \bar{E}$, on a d'après 1. (b) que

$$\delta_n(E) \leq \delta_n(\bar{E}).$$

- Montrons $\delta_n(E) \geq \delta_n(\bar{E})$.

  Pour commencer une remarque : E est borné si et seulement si $\bar{E}$ est borné. En effet si $\bar{E}$ est borné, E qui en est une partie l'est aussi. Si E est borné, alors il est inclus dans une boule fermée B, donc $\bar{E} \subset \bar{B} = B$ et donc $\bar{E}$ est borné.

  — Premier cas : E et $\bar{E}$ sont non bornés
  D'après 1.(c) $\delta_n(E) = \delta_n(\bar{E}) = +\infty$.

  — Second cas : E et $\bar{E}$ sont bornés
  soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Quitte à diminuer ε on suppose $\varepsilon < 2$. La propriété caractéristique de la borne inférieure dit qu'il existe $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ éléments de $\bar{E}$ tels que :

$$\delta_n(\bar{E}) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < g_n(Q_1, \dots, Q_n) \leq \delta_n(\bar{E}) \tag{3}$$

  Posons $d = \min\{d(Q_i, Q_j), i = 1, \dots, n, j = 1 \dots, n, i \neq j\}$. Notons que $d > 0$, car les point $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ sont deux à deux distincts puisque d'après (3), $g_n(Q_1, \dots, Q_n) > 0$. Pour $i = 1, 2, \dots n$, la boule ouverte $\mathrm{B_o}(Q_i, \frac{\varepsilon d}{4})$ rencontre E, puisque $Q_i \in \bar{E}$. Soit N_i un point de $E \cap \mathrm{B_o}(Q_i, \frac{\varepsilon d}{4})$. Par inégalité triangulaire, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, 2 \dots, n\}$,

$$d(N_i, N_j) \geq d(Q_i, Q_j) - 2\frac{\varepsilon d}{4} \geq d(Q_i, Q_j) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq 0.$$

  Par multiplication d'inégalités entre réels positifs,

$$g_n(N_1, \dots, N_n) \geq g_n(Q_1, \dots, Q_n) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

  Donc

$$\delta_n(E) \geq g_n(Q_1, \dots Q_n) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \delta_n(\bar{E}) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \geq \delta_n(\bar{E})\,(1 - \varepsilon)\,.$$

  Comme ε est quelconque $\delta_n(E) \geq \delta_n(\bar{E})$.

  Des deux points précédents il découle : $\boxed{\delta_n(E) = \delta_n(\bar{E})}$

2. Soit $P \in [P_1, P_2]$. Notons $t := d(P_1, P)\,;\ c := d(P_1, P_3)$, alors, puisque $P \in [P_1, P_3]$, $d(P_2, P_3) = c - t$, $t \in [0, c]$ et $g_3(P_1, P, P_3) = c(c - t)t$.

x	0		$\frac{c}{2}$		c
$c(c-x)x$	0	$\nearrow$	$\frac{c^3}{4}$	$\searrow$	0

L'étude du trinôme du second degré en x, $c(c-x)x^2$, et la croissance de $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ s \mapsto s^{1/3}$ montre que $g_3(P_1, P, P_3)$ est maximum si et seulement si $t = \frac{c}{2}$ et vaut dans ce cas $\frac{c}{\sqrt[3]{4}}$. Donc $\{g_3(Q_1, Q_2, Q_3), Q_i \in [a, b], i \in \{1, 2, 3\}\}$ est majoré par $\frac{a}{\sqrt[3]{4}}$, or d'après l'étude précédente, $g_3(A, \frac{1}{2}(A+B), B) = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$ et donc :

$$\boxed{\delta_3 = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}}$$

3. (a) De manière élémentaire, $d(P_1, P_2) = 2R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $d(P_1, P_3) = 2R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ et $d(P_2, P_3) = 2R\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)$ car $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{\varphi-\theta}{2}$ sont éléments de $[0, \pi]$.

   (*faites un dessin* !).

   Donc

$$g_3(P_1, P_2, P_3)^3 = 8R^3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right) = 4R^3\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right).$$

   Etudions donc $h\ :\ [0, \varphi] \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \left(\cos\left(t - \frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$.

   Tableau de variations :

t	0		$\frac{\varphi}{2}$		φ
$h(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$	$\searrow$	0

   On en déduit que $g_3(P_1, P_2, P_3)$, à P_1 et P_2 fixés, est maximum si et seulement si $\theta = \frac{\varphi}{2}$ et vaut alors $2R\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right)^{1/3}$

(b) φ n'est plus fixé. Etudions l'application

$$H\ :\ [0, 2\pi] \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

   H est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout élément $x \in [0, 2\pi]$, $H'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1 + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ et est donc du signe de $1 + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, d'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$H(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

   $g_3(p_1, P_2, P_3)$ est maximum si et seulement si $\boxed{\varphi = \frac{4\pi}{3},\ \theta = \frac{2\pi}{3}}$ et dans ce cas

$$\boxed{g_3(P_1, P_2, P_3) = R\sqrt{3}}.$$

   On pourrait montrer en adaptant le raisonnement précédent que pour que $g_3(P_1, P_2, P_3)$ *soit maximum il faut et il suffit que* $(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_3}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2})$ *ce qui conduit au résultat, mais une rédaction rigoureuse et parfaite n'est pas simple.*

(c) Soient P_1, P_2 et P_3, trois points deux à deux distincts du cercle. g_3 étant invariant par les rotations (qui consevent les distances) on peut supposer que l'angle polaire de P_1 est nul ; quitte à permuter P_1 et P_2, ce qui laisse $g_3(P_1, P_2, P_3)$ invariant, on peut supposer que les angles polaires respectifs de P_2 et P_3, θ et φ satisfont

2. C'est du cours de terminale !

$0 < \theta < \varphi < 2\pi$. D'après 3.(a), $g_3(P_1,P_2,P_3) \leq R\sqrt{3}$. Donc $\delta_3(C_R) \leq R\sqrt{3}$. Par ailleurs pour P_1,P_2,P_3 d'angles polaires respectifs 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$, $g_3(P_1,P_2,P_3) = R\sqrt{3}$ (cf. 3.(a)) donc :

$$\boxed{\delta_3(C_R) \leq R\sqrt{3}}$$

Deuxième partie

1. (a) Soit $n \geq 2$. Pour $i = 1,2\dots,n+1$, on a successivement

$$g_{n+1}(P_1,P_2,\dots,P_{n+1})^{n(n+1)} = \prod_{\substack{j=1,\dots,n+1\\ k=1,\dots,n+1\\ j\neq k,}} d(P_j,P_k),$$

$$g_{n+1}(P_1,P_2,\dots,P_{n+1})^{n(n+1)} = \prod_{\substack{j=1,\dots,n+1\\ k=1,\dots,n+1\\ j\neq k, j\neq i, k\neq i}} d(P_j,P_k) \prod_{\substack{k=1,\dots,n+1\\ k\neq i}} d(P_i,P_k) \prod_{\substack{j=1,\dots,n+1\\ j\neq i}} d(P_j,P_i).$$

Soit

$$g_{n+1}(P_1,P_2,\dots,P_{n+1})^{n(n+1)} = g_n(P_1,\dots,\not{P_i}\dots,P_{n+1})^{(n-1)n}\left(\prod_{\substack{k=1,\dots,n+1\\ k\neq i}} d(P_i,P_k)\right)^2.$$

En multipliant ces égalités pour $i = 1,2,\dots,n+1$, on a successivement :

$$\prod_{i=1}^{n+1} g_{n+1}(P_1,P_2,\dots,P_{n+1})^{n(n+1)} = \prod_{i=1}^{n+1}\left(g_n(P_1,\dots,\not{P_i}\dots,P_{n+1})^{(n-1)n}\times\left(\prod_{\substack{k=1,\dots,n+1\\ k\neq i}} d(P_i,P_k)\right)^2\right),$$

$$g_{n+1}(P_1,P_2,\dots,P_{n+1})^{n(n+1)^2} = \prod_{i=1}^{n+1} g_n(P_1,\dots,\not{P_i}\dots,P_{n+1})^{(n-1)n}\times\left(\prod_{\substack{i=1,\dots,n+1\\ k=1,\dots,n+1\\ k\neq i}} d(P_i,P_k)\right)^2,$$

$$g_{n+1}(P_1,P_2,\dots,P_{n+1})^{n(n+1)^2} = \prod_{i=1}^{n+1} g_n(P_1,\dots,\not{P_i}\dots,P_{n+1})^{(n-1)n}\times g_{n+1}(P_1,P_2,\dots,P_{n+1})^{2n(n+1)}.$$

Finalement

$$\boxed{g_{n+1}(P_1,P_2,\dots,P_{n+1})^{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} g_n(P_1,\dots,\not{P_i}\dots,P_{n+1})}$$

(b) Soient $P_1,P_2,\dots,P_{n+1}$ des points de E. Pour $i = 1,2,\dots,n$, la borne inférieure étant un majorant,

$$0 \leq g_n(P_1,\dots,\not{P_i}\dots,P_{n+1}) \leq \delta_n(E).$$

Donc d'après la question précédente,

$$g_{n+1}(P_1,P_2,\dots,P_{n+1})^{n+1} \leq \prod_{i=1}^{n} \delta_n(E) = \delta_n(E)^{n+1}.$$

et donc par croissance de $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto t^{1/(n+1)}$,

$$g_{n+1}(P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}) \leq \delta_n(E).$$

La borne supérieure étant le *plus petit* des majorants,

$$\boxed{\delta_n(E) \geq \delta_{n+1}(E)}$$

La suite $(\delta_p(E))_{p\geq 2}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

2. (a) *Ce résultat des plus classiques est à connaître par cœur!*

$X^n - 1 = \prod_{j=0}^{n-1}(X - z_j)$, puisque $X^n - 1$ est unitaire de degré n et admet pour racines $z_0, z_{,1}, \ldots, z_{n-1}$. Par dérivation (formelle)

$$nX^{n-1} = \sum_{i=0}^{n}\Bigg(1 \times \prod_{\substack{j=0,\ldots,n-1\\ j\neq i}}(X - z_j)\Bigg).$$

Pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, en substituant z_k à l'indéterminée X, dans cette dernière égalité il vient :

$$\boxed{nz_k^{n-1} = \prod_{\substack{j=0,\ldots,n-1\\ j\neq k}}(z_k - z_j)}$$

Ce par annulation des termes de la somme pour lesquels $i \neq k$, qui contiennent le facteur $(X - z_k)$.

(b) Munissons le plan Π d'un repère orthonormé directe, tel que P_1 ait comme coordonnées $(R, 0)$. en identifiant alors Π et $\mathbf{C}$, quitte à permuter les points $P_1, \ldots, P_n$ ce qui ne change pas $g_n(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, on obtient comme affixe pour P_j, le complexe Rz_{j-1}, pour $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Donc

$$g_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = \Bigg(\prod_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n\\ i\neq j}} d(P_i, P_j)\Bigg)^{1/n(n-1)} = \Bigg(\prod_{i=0}^{n-1}\prod_{\substack{j=0,\ldots,n-1\\ j\neq i}} R|z_i - z_j|\Bigg)^{1/n(n-1)}.$$

Donc d'après 1.(a),

$$g_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = R\Bigg(\prod_{i=0}^{n-1} n\underbrace{|z_i|^{n-1}}_{=1}\Bigg)^{1/n(n-1)} = Rn^{1/(n-1)}$$

Remarque : *c'est avec une joie non dissimulée que l'on retrouve pour $n = 3$, le résultat de I.3.(c) : $g_3(P_1, P_2, P_3) = R\sqrt{3}$, pour P_1, P_2, P_3 sommets d'un triangle équilatéral.*

(c) d'après la question précédente, pour tout $n \geq 2$, $\delta_n(C_R) \geq Rn^{1/(n-1)}$. Or $n^{1/(n-1)} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, donc par passage à la limite : $\Delta(C_R) \geq R$. D'où l'encadrement :

$$\boxed{R \leq \Delta(C_R) \leq \delta_3(C_R) = \sqrt{3}R}$$

Troisième partie

1. (a) Notons $\mathcal{E}$, l'ensemble des affixes des points de E. E étant bornée $\mathcal{E}$ l'est aussi. Donc il existe un réel $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathcal{E}$, $|z| \leq R$. Soit U un élément de $\mathcal{U}_n$, il s'écrit : $U(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, et donc

$$|U(z)| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| R^i,$$

pour tout $z \in \mathcal{E}$.

L'ensemble $\{U(z), z \in \mathcal{E}\}$ est donc majoré, il est aussi non vide ($E \neq \emptyset$) il admet donc une borne supérieure notée $\mathcal{S}(E, U)$. $\{\mathcal{S}(E, U), U \in \mathcal{U}_n\}$ est non vide, minoré par 0, il admet donc une borne inférieure.

Justifions, bien que le texte ne le demande pas, l'indépendance de $\sigma_n(E)$ du repère.

Soit $\mathcal{R}'$ un autre repère direct. Il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que, pour tout $M \in \Pi$, d'affixes z et z', respectivement dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on ait

$$z' = \exp(i\theta) z + z_0.$$

Plus précisément $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}' ; z \mapsto \exp(i\theta) z + z_0$ est une bijection.

Notations :

— $\mathcal{E}'$ l'ensemble des affixes des points de $\mathbf{E}$ relativement à $\mathcal{R}'$.

— $\mathcal{S}'(E, U) := \sup\{|U(z)|, z \in \mathcal{E}'\}$.

— ${\sigma'}_n := \inf\{\mathcal{S}'(E, U), U \in \mathcal{U}_n\}$.

Soit $V_0 \in \mathcal{U}_n$, posons pour tout complexe z, $U_0(z) := \exp(-in\theta) V_0(\exp(i\theta) z + z_0)$. $U_0 \in \mathcal{U}_n$ et pour tout $z \in \mathcal{E}'$, $|V_0(\varphi(z))| = |U_0(z)|$, donc

$$\{|V_0(z')|, z' \in \mathcal{E}'\} = \{|V_0(\varphi(z))|, z \in \mathcal{E}\} = \{|U_0(z)|, z \in \mathcal{E}\}.$$

Donc $\mathcal{S}'(E, V_0) = \mathcal{S}(E, U_0)$. V_0 étant quelconque,

$$\{\mathcal{S}'(E, V), V \in \mathcal{U}\} \subset \{\mathcal{S}(E, U), U \in \mathcal{U}\}$$

Donc ${\sigma'}_n(E) \geq \sigma_n(E)$ et même par symétrie de rôles de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$,

$$\boxed{{\sigma'}_n(E) = \sigma_n(E)}$$

La définition de $\sigma_n(E)$ est indépendante du repère.

(b)
- Soit $a \in \mathcal{E}$. Pour tout $z \in \mathcal{E}$, $|z - a| \leq \delta_2(E)$. Donc $\{|z - a|, z \in \mathcal{E}\}$ est majoré par $\delta_2(E)$, donc $\sup\{|z - a|, z \in \mathcal{E}\} \leq \delta_2(E)$. Or $\sup\{|z - a|, z \in \mathcal{E}\}$ vaut $\mathcal{S}(E, X - a)$, donc
$$\sigma_1(E) \leq \mathcal{S}(E, X - a) \leq \delta_2(E).$$
- Pour tout $b_0 \in \mathbf{C}$ et tout couple (P_1, P_2) d'éléments de $\mathbf{E}$ d'affixes respectifs z_1 et z_2,
$$g_2(P_1, P_2) = d(P_1, P_2) = |z_1 - z_2| \leq |z_1 - b_0| + |z_2 - b_0| \leq 2\mathcal{S}(E, X - b_0).$$
Donc, $\frac{1}{2} g_2(P_1, P_2)$ minore $\{\mathcal{S}(E, X - b_0), b_0 \in \mathbf{C}\} = \{\mathcal{S}(E, U), U \in \mathcal{U}_1\}$.

  Donc, la borne inférieure étant le plus grands des minorants,
$$g_2(P_1, P_2) \leq 2\sigma_1(E).$$
Finalement, la borne supérieure étant le plus petits des majorants,
$$\delta_2(E) \leq 2\sigma_1(E).$$
Conclusion $\boxed{\sigma_1(E) \leq \delta_2(E) \leq 2\sigma_1(E)}$

2. (a) Soit $x \in I$. Posons $\theta = \arccos(x)$. Soit enfin $n \in N^*$.

$$2^{n+1}T_{n+2}(x)+2^{n-1}T_n(x) = \cos((n+2)\theta)+\cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta+\theta)+\cos((n+1)\theta-\theta).$$

Donc

$$2^{n+1}T_{n+2}(x)+2^{n-1}T_n(x) = (\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta))+$$
$$(\cos((n+1)\theta)\cos(-\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(-\theta)),$$

soit

$$2^{n+1}T_{n+2}(x) + 2^{n-1}T_{n+2}(x) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta).$$

D'où la relation de récurrence :

$$\boxed{T_{n+2}(x) = xT_{n+1}(x) - \frac{1}{4}T_n(x)} \qquad (4)$$

(b) On identifie maintenant polynôme et fonction polynomiale sur I associée.

Pour tout $n \in N^*$ on note $(\mathrm{P_n})$ la propriété :

$(\mathrm{P_n})$: Pour tout élément k de $\{1, 2 \ldots, n+1\}$, T_k est un polynôme unitaire de degré k.

- $(\mathrm{P_1})$ *est vraie.*
  En effet, pour tout élément x de I,
  $T_1(x) = x$ et $T_2(x) = \frac{1}{2}\cos(2\arccos(x)) = \frac{1}{2}\left(2\cos^2(\arccos(x)) - 1\right) = x^2 - \frac{1}{2}$.
- *Soit* $m \in \mathbf{N}^*$. *Supposons* $(\mathrm{P_m})$. *Montrons* $(\mathrm{P_{m+1}})$.
  D'après $(\mathrm{P_m})$, T_m est un polynôme de degré m, T_{m+1} est un polynôme unitaire de degré $m+1$, et donc XT_{m+1} est un polynôme unitaire et $\mathrm{d}^\circ(XT_{m+1}) = m+2 > \mathrm{d}^\circ(T_m)$. On déduit donc de (4) que T_{m+2} est un polynôme unitaire de degré $m+2$. D'où $(\mathrm{P_{m+1}})$.
- Par récurrence, on a prouvé que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(\mathrm{P_n})$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $x \in I$, $|T_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, de plus $|T_n(0)| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Le maximum de T_n sur I est donc $\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(c) $|U|$ est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc atteint sa borne supérieur en un point t_0 de $[-1, 1]$. D'ou l'existence de $\max\{|U(x)|, x \in I\}$, qui vaut $|U(t_0)||$.

(d) Pour $k = 0, 1, \ldots, n$, $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$ [3], et donc :
$U(x_k) - T_n(x_k) = U(x_k) - \frac{1}{2^{n-1}}\cos(k\pi) = U(x_k) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$. Comme $|U(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, pour tout $x \in I$,

$$(U - T_n)(x_k) < 0, \text{pour } k \text{ pair},$$

$$(U - T_n)(x_k) > 0, \text{pour } k \text{ impair}.$$

Or $U - T_n$ est continu, donc le théorème de la valeur intermédiaire assure que $U - T_n$ s'annule sur les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, pour $k = 0, 1 \ldots, n-1$. $U - T_n$ admet donc au moins n racines distinctes. Or U et T_n sont unitaires de même degré n, donc $\mathrm{d}^\circ(U - T_n) < n$. Donc $U - T_n$, polynôme ayant plus de racines que son degré, est nul. Mais alors le maximum de $|U|$ sur I est d'après 1., $\frac{1}{2^{n-1}}$ ce qui constitue une contradiction.

Pour un polynôme U unitaire de degré n, réel, $\max\{|U(x)|, x \in I\} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. Avant d'écrire que $\arccos(\cos(a)) = a$ il faut s'assurer que $a \in [0, \pi]$.

(e) Soit un polynôme U unitaire de degré n, complexe. Sa partie réelle est un polynôme R unitaire de degré n réel. Donc $\max\{|R(x)|, x \in I\} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$, mais pour tout $x \in I$, $|U(x)| \geq |R(x)|$, donc *a fortiori*,

$$\boxed{\max\{|U(x)|, x \in I\} \geq \frac{1}{2^{n-1}}}$$

(f) Soit $U \in \mathcal{U}_n$, d'après 2. (b), $\mathcal{S}(I, U) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. donc $\sigma_n(I) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Or $\mathcal{S}(I, T_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$, donc $\sigma_n(I) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Finalement $\sigma_n(I) = \frac{1}{2^{n-1}}$ et donc :

$$\boxed{\mu_n(I) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}}$$

Indications pour la fin du devoir (ce n'est plus une correction !)

1. (a) Raisonner par récurrence.

   (b) $\{u_n | n \in \mathbf{N}\}$ est non vide minoré par 0 donc admet une borne inférieure ℓ.

   (c) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. La propriété de la borne inférieure donne l'existence de $p \in \mathbf{N}$ tel que :

   $$\ell \leq u_p \leq \ell + \varepsilon.$$

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, par dividion euclidienne $n = k_n p + r_n$, avec $0 \leq r_n < p$. $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

   $$u_n \leq \left(u_{k_n p}^{k_n p} u_{r_n}^{r_n}\right)^{\frac{1}{k_n p + r_n}} \leq \left(u_p^{k_n p} u_{r_n}^{r_n}\right)^{\frac{1}{k_n p + r_n}}.$$

   Or $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ et $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc

   $$\left(u_p^{k_n p} u_{r_n}^{r_n}\right)^{\frac{1}{k_n p + r_n}} \underset{n\to+\infty}{\to} u_p < \ell + \varepsilon.$$

   Donc pour n suffisament grand $\ell \leq u_n < \ell + 2\varepsilon$...

   (d) Soient P et Q des polynômes complexes de degrés respectifs p et q unitaires. Pour tout $z \in \mathbf{E}$,

   $$|PQ(z)| = |P(z)||Q(z)| \leq S(E, P)S(E, Q).$$

   Donc $S(E, PQ) \leq S(E, P)S(E, Q)$, et donc $\sigma_{pq} \leq S(E, P)S(E, Q)$, puisque PQ est unitaire de degré $p + q$. Donc la borne inférieure étant le plus grand des minorants et P et Q étant quelconques.

   $$\sigma_{pq} \leq \sigma_p \sigma_q.$$

   (e) Au cas où l'un des $\sigma_m(E)$ est nul, les suivants aussi et $(\mu_n)_{n\in N}$ étant nulle à partir d'un certain rang converge vers zéro. Sinon, la suite $(\mu_n)_{n\in N}$ vérifie la propriété du 3., donc converge vers sa borne inférieure.

2. (a) Par développement par rapport à la dernière ligne :

   $$|V| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |U(z_i)| \prod_{1\leq k<j\leq n+1, k\neq i j\neq i} |z_k - z_j| \leq \sum_{i=1}^{n+1} S(E, U) \prod_{1\leq k<j\leq n+1, k\neq i j\neq i} |z_k - z_j|$$

Or $\prod_{1\le k<j\le n+1, k\ne ij\ne i} |z_k - z_j| = g_n(P_1, \dots \cancel{P_i} \dots P_{n+1})^{\frac{n(n-1)}{2}} \le \delta_n^{\frac{n(n-1)}{2}}$, où P_k est le point d'affixe z_k, pour $k = 1, \dots, n = 1$. Donc

$$g_n(P_1, \dots P_{n+1})^{\frac{n(n+1)}{2}} = |V| \le (n+1)S(E,U)\delta_n^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

D'où l'on tire facilement :

$$\delta_{n+1}(E)^{\frac{n(n+1)}{2}} \le (n+1)\delta_n(E)^{\frac{n(n-1)}{2}}\mu_n(E)^n.$$

(b) La formule résulte du choix particulier de U, $U = U_0$ qui donne :

$$\delta_{n+1}(E)^{\frac{n(n+1)}{2}} \ge g_{n+1}(P_1, \dots P_{n+1})^{\frac{n(n+1)}{2}} = |V| = |U_0(z_{n+1}| \prod_{1\le k<j\le n} |z_k - z_j|,$$

puis z_{n+1} étant quelconque,

$$\delta_{n+1}(E)^{\frac{n(n+1)}{2}} \ge S(E, U_0)| \prod_{1\le k<j\le n} |z_k - z_j|...$$

(c) Résulte immédiatement de la sous-question précédente et de la décroissance de $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

(d) On multiplie les inégalités 4.(a) et après un téléscopage on obtient la formule.

(e) Se déduit de la sous-question précédente et de la première question des prélimlinaires.