..

# Correction du DM n$^o$2

**Marche aléatoire dans un labyrinthe**

## 1 Préliminaires

1. Soit $k \in \mathbf{N}$. Pour $i = 1, ..., n$, la formule des probabilités totales, relative au système complet d'événements $(\{S_k = j\})_{j=1,...,n}$, prétend :

$$(X_{k+1})[i] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(S_{k+1} = i | S_k = j)\mathbf{P}(S_k = j) = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j}\ (X_k)[j] = (TX_k)[i].$$

Donc $\underline{X_{k+1} = TX_k}$.

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\sum_{j=1}^{n} A[i,j] = \sum_{j=1}^{n} t_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(S_{k+1} = j | S_k = i) = \mathbf{P}_{\{S_k=i\}}(\biguplus_{j=1}^{n}\{S_{k+1} = j\} = \mathbf{P}_{\{S_k=i\}}(\Omega) = 1.$$

La somme de chaque ligne de $A$ vaut donc 1.

Donc avec les notations de 4., $AU = 1 \cdot U$, donc 1 est valeur propre de $A$. Comme $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(T)$, on a :

$$\underline{1 \in \mathrm{Sp}(T).}$$

3. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ on note $E^*_{i,j}$ la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui associe à une matrice son coefficient d'indice $(i, j)$ et $L^*_i = E^*_{i,1} + E^*_{i,2} + ... + E^*_{i,n}$, ; la linéarité des $E^*_{i,j}$ assure leur continuité ainsi que celle des $L^*_i$ ($\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie). Alors :

$$\mathcal{E} = \bigcap_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (E^*_{i,j})^{-1}(\mathbf{R}_+) \cap \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} (L^*_i)^{-1}(\{1\}).$$

Donc $\mathcal{E}$ est une intersection d'images réciproques de fermés par des applications continues, donc une intersection de fermés, donc $\mathcal{E}$ est fermé.

Observons que pour $M$ élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la condition ii., équivaut à $MU = U$.

Soient alors $A$ et $B$ des éléments de $\mathcal{E}$ et $\lambda$ de $[0, 1]$.

Alors :

— pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $(\lambda A + (1 - \lambda)B)[i, j]$ est positif ou nul comme moyenne à coefficientss positif ou nul des réels positifs ou nuls $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.

— pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, par linéarité de $L^*_i$,

$$L^*_i(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda L^*_i(A) + (1 - \lambda)L^*_i(B) = \lambda \times 1 + (1 - \lambda) \times 1 = 1.$$

Donc $\lambda A + (1 - \lambda)B \in \mathcal{E}$.

Donc $\mathcal{E}$ est convexe.

4. Soient $A$ et $B$ des éléments de $\mathcal{E}$.

On a que :

— pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $(AB)[i, j]$ est positif ou nul comme somme de produits de coefficients de $A$ et de $B$ qui sont positifs ou nuls.

— l'égalité $(AB)U = AU = U$ assure que la somme de toute ligne de $AB$ est 1.

Donc $AB \in \mathcal{E}$.

Donc $\mathcal{E}$ est stable par produit.

# 2 Un exemple

5

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

6 On a :

$$T - I_5 = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

La sous-matrice d'ordre 4 de $T - I_5$ obtenue en « enlevant la première ligne et la première colonne », est inversible (elle est à diagonale strictement dominante) donc le rang de $T - I_5$ est au moins 4, donc est 4 puisque 1 est valeur propre de $T$.

Donc, par la formule du rang $\underline{\dim(E_1(T)) = 1.}$

7 Soient $\lambda$ une valeur propre de $T$ distincte de 1 et $V$ un vecteur propre associé.

En sommant les lignes de la matrice colonne $TV - \lambda V$ qu est nulle, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=1}^{5} t_{i,j}v_j\right) - \lambda \sum_{i=1}^{5} v_i = \sum_{j=1}^{5}\left(v_j \sum_{i=1}^{5} t_{i,j}\right) - \lambda \sum_{i=1}^{5} v_i \\ &= \sum_{j=1}^{5} v_j \times 1 - \lambda \sum_{i=1}^{5} v_i = (1-\lambda)\sum_{k=1}^{5} v_k. \end{aligned}.$$

Comme $(1-\lambda) \neq 0$, on a $V \in H$.

Donc $\underline{E_\lambda(T) \subset H.}$

8 Un calcul immédiat donne $BX_0 = X_0$ et, par récurrence immédiate, $X_k = B^k X_0 = X_0$ pour tout entier $k$. Donc <u>toutes les $S_k$ ont même loi dans ce cas</u>

9 Si le rat est dans une pièce, il la quitte au temps suivant. Ainsi, $\mathbb{P}(S_0 = 1 \cap S_1 = 1) = 0$. Or $\mathbb{P}(S_0 = 1)\mathbb{P}(S_1 = 1) = \frac{1}{16} \neq 0$. Ainsi <u>$S_0$ et $S_1$ ne sont-elles pas indépendantes</u>

# 3 Matrice stochastiques

10. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, par positivité des coefficients de $A$,

$$|(AX)[i]| = |\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j| \leq = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\|X\|_\infty = 1 \times \|X\|_\infty.$$

Donc $\underline{\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty.}$

12 Soit $X$ élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

• Supposons $A \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$.

Alors, une récurrence immédiate assure que pour tout $\ell \in \mathbf{N}, A^\ell X = X$ et donc que $(R_k X)_{k \in N}$ est constante de valeur $X$, et converge donc vers $X$.

• Supposons $A \in \mathrm{Im}(A - I_n)$.

Alors en considérant $Z$ un antécédent de $X$, une récurrence immédiate assure que pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, $A^\ell X = A^{\ell+1}X - A^\ell X$, de sorte que par téléscopage :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ R_k = \frac{1}{k}(A^{k+1}X - X).$$

Donc par une itération de 10, pour tout entier $k \geq 0$,

$$0 \leq \|R_k X\|_\infty \leq \frac{1}{k}(\|A^{k+1}X\| + \|X\|_\infty) \leq \frac{2}{k}\|X\|_\infty.$$

Donc par encadrement, $(R_k X)_{k\in N}$ converge vers $O_{n,1}$.
Donc si $X$ appartient à $\mathrm{Ker}(A - I_n) \cap \mathrm{Im}(A - I_n)$, alors par unicité de la limite de la suite $(R_k X)_{k\in N}$, il est nul.
Donc

$$\mathrm{Ker}(A - I_n) + \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n).$$

Mais alors, par *la formule du rang*,

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - I_n) + \mathrm{Im}(A - I_n)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) + \dim(\mathrm{Im}(A - I_n)) = n.$$

Donc $\underline{\mathrm{Ker}(A - I_n) \text{ et } \mathrm{Im}(A - I_n) \text{ sont supplémentaires.}}$

13 Dans la question précédente nous avons montrer que pour tout élément $Z$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $R_k X$ tend vers le projeté de $Z$ sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ selon $\mathrm{Im}(A - I_n)$, donc vers $PZ$.
En particulier, en notant $(E_1, ..., En)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$R_k[i, j] = E_i^\top R_k E_j \underset{k\to+\infty}{\to} E_i^\top P E_j = P[i, j],$$

par continuité du produit scalaire canonique par $E_i$ [1] . Donc, $\underline{R_k \underset{k\to+\infty}{\to} P}$, par convergence composante par composante dans la base canonique [2].

14. Par 11, $R_k$ est stochastique, donc $\mathcal{E}$ étant fermé (question 3) sa limite $\underline{P \text{ est stochastique.}}$

15. Notons $B = A^p$. La matrice $B$ est une matrice stochastique (question 4) à coefficients strictement positfs. Soit $X \in \mathrm{Ker}(B - I_n)$ et $s$ un indice tel que $x_s$ soit le maximum des $x_i$.
L'égalité $x_s = (BX)[s]$ donne par positivité des $b_{s,j}$ et stocasticité de $B$ (question 4),

$$x_s = \sum_{j=1}^{n} b_{s,j}x_j \leq x_s \sum_{j=1}^{n} b_{s,j} = x_s \times 1 = x_s.$$

Donc pour $j = 1, , ...n$ on a $b_{s,j}x_j = b_{s,j}x_s$, et donc, comme les $b_{s,j}$ sont strictement positifs $x_j = x_s$. Donc $X = x_s U$. Comme $\mathrm{Ker}(A^p - I_n)$ contient $U$ par stocasticité de $A^p$ (même raisonnement qu'en 2), on a :
$\underline{\mathrm{Ker}(A^p - I_n) \text{ est la droite } \mathrm{Vect}(U).}$

16 On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$ car $A$ est stochastique. Par ailleurs

$$(A^p - I_n) = (I_n + A + ... + A^p)(A - I_n),$$

donc

$$\mathrm{Ker}(A - I_n) \subset \mathrm{Ker}((A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U).$$

Donc $\underline{\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U).}$

1. On peut ajouter que le produit scalaire est continu, car polynomial en les coordonnées de la variable, mais bientôt on écrira seulement, continu car linéaire en dimension finie.
2. Dans le cours nous avons la convergence pour la norme infinie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, mais nous ne précisons pas car — nous le verrons bientôt — toutes les normes en dimension finie sont équivalentes.

17. Pour $j = 1, ..., n$ la $j^{\text{e}}$ colonnes de $P$ est de la forme $\ell_j U$ où $\ell_j$ est un réel. Alors

$$\underline{P = LU,}$$

en posant $L = (\ell_1, ..., \ell_n)$. Comme $P$ est sochastique sa première ligne est *a fortiori* stochastique, mais cette ligne (comme toute les autres) est $L$, donc $\underline{L \text{ est stochastique.}}$

18 Remarquons que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$R_k A = \frac{k+1}{k} R_{k+1} - \frac{1}{k} I_n.$$

Donc par 13,

$$R_k A \underset{k \to +\infty}{\to} 1 \times P + O_n.$$

mais par continuité du produit à droite par $A$ (linéaire en dimension finie) $R_k A \underset{k \to +\infty}{\to} PA$, par unicité de la limite : $\underline{PA = A}$

$P$ est une matrice dont toutes les lignes sont égale à $L$. Donc $PA$ est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont $LA$. L'égalité $PA = P$ donne $\underline{LA = L.}$

Soit $Y$ une matrice ligne sochastique telle que $YA = Y$. Alors, en transposant cette égalité $Y^\top \in E_1(A^\top)$, mais la transposition conservant le rang $\dim(E_1(A^\top) = \dim(E_1(A) = 1$, par 16. Donc $Y$ est colinéaire à $L$, donc puisque $Y$ et $L$ sont stochastiques $Y = L$.

Il existe une et une seule matrice ligne stocastique $y$ telle que $YA = Y$, c'est $L$.

19. On

$$L = LA = LAA = ..... = L \underbrace{AA...A}_{p \text{ termes}} = LB.$$

Soit $j \in [\![0, n]\!]$, la $i^{\text{e}}$ composante de l'égélité précédente donne

$$L_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}.$$

Or $b_{1,j}$, $b_{2,j}$,...,$b_{n,j}$ sont strictement positifs et $L_1$, $L_2$,...,$L_n$ positifs et l'un au moins est *strictement positif* ($L$ est stochastique), donc $\underline{L_j > 0}$.

20. On sait que $\operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n) = \mathbf{R}^n$.
Posons $F = \operatorname{Ker}(A - I_n)$ et $G = \operatorname{Im}(A - I_n)$. Les espaces $F$ et $G$ sont stables par l'endomorphisme $u$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associé à $A$, car $A$ et $A - I_n$ commutent. En notant $u_F$ et $u_G$ les endomorphismes induits respectivement sur $F$ et $G$ par $u$, comme $F \oplus G = \mathbf{R}^n$,

$$\chi_A = \chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$$

$F$ est de dimension 1 et $u_F = \mathrm{Id}_F$ donc $\chi_{u_F} = (X - 1)$. Comme $F \cap G = \{0_{n,1}\}$, $u_G - \mathrm{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de $\chi_{u_G}$. Donc 1 est racine simple de $\chi_u$, c'est- à-dire : 1 est valeur propre simple de $A$.

# 4 Application au labyrinthe

**Remarque.** *Que $A^2$ soit à coefficients strictements positif traduit que le rat peut de toute salle atteindre toute salle en deux étapes, ce qui est clair.*

21 Selon la partie 3, $E_1(T)$ est une droite dirigée par$L^\top$, la question 7 nous offre donc :

$$L = \frac{1}{16}(4, 3, 3, 3, 3).$$

D'où par 17 :

$$\underline{P = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

22 Les variables$S_k$ suivent toute la même loi si et seulement si $TX_0 = X_0$ ou, en transposant, si et seuelement si $X_0^\top A = X_0^\top$. Autrement dit les variables $S_k$ suivent la même loi si et seulement si $\underline{X_0 = L^\top.}$