DM n°4

Ce palpitant devoir est composé d'un distrayant exercice et d'un passionant devoir d'analyse, pouvant comporter ça et là certaines questions non élémentaires.

EXERCICE

1. (a) Soit l'application

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge.

En admettant que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$, montrer la convergence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} \mathrm{d}t$.

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

(a) Vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} \mathrm{d}t$ converge.

(b) Donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} \mathrm{d}t$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $h_n = \sin^n$.

(a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que pour $k = 0, 1, ..., n-1$, l'application $h_n^{(k)}$ est bornée.

(b) Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de l'application h_n.

En déduire que

$$\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} n!\ .$$

(c) Montrer pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, la convergence absolue de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \mathrm{d}t.$$

(d) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} \mathrm{d}t$$

et établir l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

PROBLÈME

Notations

- Pour tout réel x, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x,
- On désigne par $\#E$ le cardinal, c'est-à-dire le nombre d'éléments, d'un ensemble fini E.

Nous aurons besoin dans ce problème des deux théorèmes suivants que nous admettrons, un sera vu en cours d'année l'autre prouvé en TD.
Définition : *On appelle fonction en escalier sur $[0, 2\pi]$ toute application f de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$, pour laquelle il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_p)$ de $[0, 2\pi]$: $0 = a_0 < a_l < \ldots < a_p = 2\pi$, telle que f soit constante sur chaque intervalle de la forme $]a_i, a_{i+1}[$.*

Théorème 1. *Soit f une application de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe g fonction en escalier sur $[0, 2\pi]$ telle que $\sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - g_(x)| \leq \varepsilon$.*

Définition. *On appelle polynôme trigonométrique toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$*

$$P \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ t \mapsto \sum_{k=-p}^{p} c_k \exp(ikt),$$

avec p une entier naturel et $c_p, \ldots c_{-1}, c_0, c_1, \ldots c_p$ des nombres complexes.

Théorème 2. *Soit f une application de dans $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ 2π-périodique et continue. Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - P_(x)| \leq \varepsilon$.*

Ce problème étudie les suites équidistribuées :

Définition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0, 2\pi]$. On note pour tout élémennt α de $]0, 2\pi]$ et tout entier $N \geq 1$,*

$$F_N(\alpha) = \frac{1}{N}\#\{n \in \{1, 2, \ldots, N\} | u_n \in [0, \alpha[\}.$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0, 2\pi]$ (ou plus succintement équidistribuée), si, pour tout $\alpha \in]0, 2\pi]$,

$$F_N(\alpha) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{\alpha}{2\pi}.$$

La première partie établira des propriétés élémentaires des suites équidistribuées et montrera que l'on peut remplacer dans leur définition l'intervalle $[0, \alpha[$ par un intervalle quelconque. Elle établit ensuite une caractérisation intégrale des suites équidistribuées.
La deuxième partie étudie une suite équidistribuée particulière.
La dernière utilise le résultat de la deuxième afin d'évaluer la probabilité qu'une puissance entière de 2 commence par un chiffre donné.

Première partie

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite équidistribuée dans $[0, 2\pi]$.

   (a) Montrer que pour tous α_1 et tout α_2 réels tels que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2\pi$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N_0 \geq 1$ tel que pour tout entier $N \geq N_0$,

   $$0 \leq F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1) \leq \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} + \varepsilon.$$

(b) Montrer que pour tout élément α de $[0, 2\pi]$,

$$\frac{1}{N}\#\{n \in \{1, 2, \dots, N\} | u_n = \alpha\} \underset{N\to+\infty}{\rightarrow} 0,$$

(on pourra commencer par étudier le cas $\alpha \in]0, 2\pi[$, que l'on traitera soigneusement en utilisant la sous-question précédente, et étudier plus sommairement les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 2\pi$).

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite équidistribuée dans $[0, 2\pi]$.

   (a) On note I un intervalle ouvert inclus dans $[0, 2\pi]$, et $\mathbf{1}_I$ la fonction caractéristique de I, définie par :
   $$\mathbf{1}_I \ : \ [0, 2\pi] \to \mathbf{R}\,; \ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I, \\ 0, & \text{si } x \notin I, \end{cases}$$
   Montrer que
   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_I(u_n) \underset{N\to+\infty}{\rightarrow} \frac{|I|}{2\pi},$$
   où $|I|$ est la longueur de I.

   (b) Montrer que pour f fonction en escalier sur $[0, 2\pi]$,
   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

   (c) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{R})$. Montrer, en utilisant le théorème 1 que :
   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0, 2\pi]$. On note $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications f de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$ telles que :
   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) soit α un élément de $]0, 2\pi]$. Montrer qu'il existe deux applications de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$, f_- et f_+, continues et vériviant les propriétés suivantes :
      i. $f_+(0) = f_+(2\pi)$, $f_-(0) = f_-(2\pi)$;
      ii. $f_- \leq \mathbf{1}_{[0,\alpha[} \leq f_+$;
      ii. $\int_0^{2\pi} f_+(t)\mathrm{d}t - \varepsilon \leq \alpha \leq \int_0^{2\pi} f_-(t)\mathrm{d}t + \varepsilon$.

   La représentation claire et précise des graphes de f_+ et f_- tiendra, sans autres explications, lieu de réponse.

   (b) En déduire que si toute application f de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$, continue et prenant des valeurs identiques en 0 et 2π est dans $\mathbf{E}$, alors la suite$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équidistribuée dans $[0, 2\pi]$.

Deuxième partie

Soit $a \in \mathbf{R}$ on définit la suite $(u_n)_{n in \mathbf{N}^*}$ par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = (na - E(na))2\pi.$$

1. Calculer $\int_0^{2\pi} \exp(ikt)\mathrm{d}t$, pour tout élément k de $\mathbf{Z}$.
2. On suppose que a est irrationnel.
   (a) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{N} \exp(iku_n)$ pour tout élément k de $\mathbf{Z}$.
   (b) Montrer que pour tout polynôme trigonométrique P, on a :
   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée.
   Indication : on pourra utiliser le théorème 2.
4. Le nombre a est maintenant élément de $\mathbf{Q}$: $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. En étudiant $\sum\limits_{n=1}^{N} \exp(iku_n)$ et $\int_0^{2\pi} \exp(ikt)\mathrm{d}t$, pour un entier k bien choisi, montrer que la suite$(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'est pas équidistribuée.

Troisième partie (facultative)

Théorème de Bedford

1. Montrer qu'il existe un réel C (à déterminer), tel que pour tout entier $n \geq 1$:
   $$10^p \leq 2^n < 10^{p+1} \text{ si et seulement si } p = E(nC).$$
2. Soit un entier $n \geq 1$. Montrer que le premier chiffre (à gauche) dans l'écriture décimale de 2^n est k, ($k \in 1, 2, \ldots, , 9$), si et seulement si :
   $$\ln k \leq n \ln 2 - \ln(10)\mathrm{E}\left(\frac{n \ln 2}{\ln 10}\right) < \ln(k+1).$$
3. Pour tout entier $N \geq 1$ et tout élément k de $1, 2, \ldots, 9$, on note $\mathbf{1}_k(N)$ le nombre d'entiers $n \leq N$, tels que le premier chiffre dans l'écriture décimale de 2^n soit k. Montrer que $\frac{1}{N}\mathbf{1}_k(N)$ tend vers une limite à déterminer lorsque N tend vers $+\infty$.
   (On admettra ici que $\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$ est irrationnel.)
4. Interpréter pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{N}\mathbf{1}_k(N)$ en terme de probabilités, ainsi que $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\mathbf{1}_k(N)$.

Indications pour le DM n$^\text{o}$4

EXERCICE
PROBLÈME

1. (a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. on a presque immédiatement

$$\boxed{F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1) \leq \frac{\alpha_2}{2\pi} - \frac{\alpha_1}{2\pi} + \varepsilon.}$$

L'inégalité $\boxed{0 \leq F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1)}$ est évidente, elle résulte de ce que l'application

$$\alpha \mapsto \#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n \in [0, \alpha[\}$$

est croissante.

(b) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.
• Supposons $\alpha \in]0, 2\pi[$.
on peut trouver α_1 et α_2 des réels tels que :

$$0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 < 2\pi \text{ et } < \alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon.$$

D'après (a), on dispose d'un entier N_0 tel que pour tout entier $N \geq N_0$:

$$0 \leq F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1) \leq \frac{\alpha_2}{2\pi} - \frac{\alpha_1}{2\pi} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

La fin est immédiate...
Supposons $\alpha = 0$.

$$0 \leq \frac{1}{N} \#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n = 0\} \leq \frac{1}{N} \#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n \in [0, \varepsilon[\} = F_N(\varepsilon).$$

Or $F_N(\varepsilon) \underset{N \to +\infty}{\to} \frac{\varepsilon}{2\pi}$ Donc on dispose d'un entier $N_1 \in \mathbf{N}$, tel que pour tout entier $N \geq N_1$,$F_N(\varepsilon) \leq \varepsilon$......
Supposons $\alpha = 2\pi$. (Raisonner comme dans le cas précédent, à la rigueur ne pas faire ce cas en renvoyant au précédent)

2. (a) prenons pour I, l'intervalle $]a, b[$.

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_I(u_n) = \#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N \,|u_n \in I\} = \#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N \,|u_n \in [a, b[\}$$
$$-\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N \,|u_n = a\}$$

Conclure grâce à 1. (b),

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N \to +\infty}{\to} \frac{b-a}{2\pi} - 0 = \frac{|I|}{2\pi}}$$

(b) Soit $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ adaptée à f de sorte que f s'écrive :

$$f = \sum_{i=1}^{p-1} c_i \mathbf{1}_{]a_i, a_{i+1}[} + \sum_{i=1}^{p} d_i \mathbf{1}_{\{a_i\}},$$

Utiliser alors (a) et 1. (b)

3. (a) Les application f_+ et f_- sont affines par morceaux continues et données par des graphes précis et cotés.

(b) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Avec les notations précédentes pour tout entier $N \geq 1$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_-(u_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=n}^{N} \mathbf{1}_{[0,\alpha[}(u_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_+(u_n)$$

Or par hypothèse $\frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} f_\pm(u_n) \underset{N \to +\infty}{\to} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\pm(t)\mathrm{d}t$. donc on peut choisir un entier $N_0 \geq 1$ tel que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, si $N \geq N_0$, alors :

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_\pm(u_n) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\pm(t)\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Donc pour tout entier $N \geq N_0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_-(t)\mathrm{d}t - \varepsilon \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,\alpha[}(u_n) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_+(t)\mathrm{d}t + \varepsilon$$

Pour finir utiliser ii.,

Deuxième partie

1. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ikt)$ vaut 1 pour $k = 0$ et est nulle pour tout autre valeur de k.

2. Distinger les deux cas $k = 0$ et $k \neq 0$ et se ramener à une suite géométrique.

Soit $k \in \mathbf{Z}$.

- *Premier cas* $k \neq 0$.

$$\sum_{n=1}^{N} \exp(iu_n) = \sum_{n=1}^{N} \exp(ik2\pi(na - E(na))) = \sum_{n=1}^{N} \exp(ik2\pi(na)) = \sum_{n=1}^{N} \exp(ik2\pi a)^n$$

par 2π-périodicité de $\exp(i\cdot)$.

Par ailleurs $ik2\pi a \notin 2\pi\mathbf{Z}$ car sinon a serait rationnel, donc $\exp(ik2\pi a) \neq 1$, et donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \exp(iku_n) = \exp(ik2\pi a) \frac{1 - \exp(ik2\pi a)^N}{1 - \exp(ik2\pi a)}.}$$

- *Second cas* $k = 0$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \exp(iku_n) = \sum_{n=1}^{N} 1 = N}.$$

(b) Soit P un polynôme trigonométrique.

$$P = \sum_{k=-p}^{p} c_k \exp(ik\,\cdot).$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) = \sum_{k=-p}^{p} c_k \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(iu_n).$$

D'après (a) montrer que pour un entier $k \neq 0$ que $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(iu_n) \underset{N\to+\infty}{\to} 0$. puis que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} c_0.$$

Par ailleurs, calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t$ et conclure que

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t}$$

3. Soit f une application de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$ continue et prenant des valeurs identiques en 0 et en 2π.
   f se prolonge à $\mathbf{R}$ en une application 2π-périodique continue encore notée f.
   Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Prenons,grâce au théorème 2, P, Polynôme trigonométrique tel que
   $$\sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$
   On a pour tout $N \in \mathbf{N}$:
   $$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n)\right| +$$
   $$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\right|.$$
   Majorer tour a tour les deux derniers termes par ε puis le premier pour N suffisemment grand.
   Finalement pour tout entier $N \geq N_0$, $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq 3\varepsilon$; ε étant quelconque :
   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$
   D'après I. 3., on a donc que $\underline{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est équidistribuée dans } [0, 2\pi].}$
4. Le nombre a étant de $\mathbf{Q}$: $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.
   Montrer que la propriété 2. (b) n'est pas satisfaite pour $P = \cos(k\,\cdot)$ pour un k bien choisi....