DM n°5

Ce palpitant devoir est composé d'un exercice classique et d'un problème court mais passionnat qui ont en partie des préoccupations communes.

Exercice

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réels non nuls , nous dirons que le produit infini associé à la suite, noté $\prod a_n$ converge si par définition la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout entier naturel n, $P_n := \prod_{k=0}^{n} a_k$, converge vers une limite *non nulle*.

1. Montrer que si le produit converge alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

   On suppose dans la suite cette condition réalisée. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 1$ et l'on suppose que : $u_n \neq -1$, cest-à-dire que a_n est non nul, pour tout entier naturel n.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geq n_0$, la quantité $\ln(1+u_n)$ est définie. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Dans la suite, on supposera que $\ln(1+u_n)$ est défini pour tout $n \geq 0$.

   Attention ! *Nous insistons sur le fait que $\prod a_n$ n'est pas un réel et que des expressions du type* $\ln\left(\prod_{n\geq n_0} a_n\right)$ *n'ont rigoureusement aucun sens.*

3. On suppose en outre, dans cette question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe fixe à partir d'un certain rang. Montrer que le produit $\prod a_n$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.

4. On ne suppose plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe fixe à partir d'un certain rang, mais que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que le produit converge si et seulement si la série $\sum u_n^2$ converge.

5. Déterminer la nature des produits infinis suivants :
   (a) $\prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.
   (b) $\prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$, où x est un élément de $]-\pi,\pi[$.
   (c) $\prod_{n\geq 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right)\exp\left(-\frac{x}{n}\right)$, où x est un élément de $\mathbf{R}_+^*$.

6. Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par p_n le n-ième nombre premier. On se propose démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge [1].

   On note $(p_n)_{n\geq 1}$, la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant :

   $$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11\ldots$$

   (a) Soit un entier $p \geq 2$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$.

1. Cela signifie qu'il y a pas mal de nombres premiers ! A titre de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ converge.

(b) Soient une entier $N \geq 2$ et un entier $M \geq 1$. Déduire de la sous question précédente que :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_N)\in\{0,1,\dots,M\}^N} \frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N}}.$$

(c) Montrer que le produit $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ diverge.

(d) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge.

PROBLÈME

On considère dans ce problème la fonction

$$zta\ :]1,+\infty[\to \mathbf{R}\,;\ x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x},$$

dite *fonction zéta de Riemann.*

Partie I – Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=\frac{1}{n^x}.$$

1. Démontrer que la fonction ζ est décroissante.
2. (5/2) La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1,+\infty[$?
3. (5/2) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. Montrer que ζ admet une limite en $+\infty$. À l'aide d'une comparaison à une intégrale déterminer cette limite.
5. Déterminer un équivalent de ζ au voisinage de 1.
6. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A=\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ et d x unb réel stritement supérieur à 1. Justifier que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}.$$

On pourra considérer la famille $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de parties de A où pour tout entier $n\geq 1$:

$$A_n=\{(a,b)\in A,\ ab=n\}.$$

Partie II – Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. Soit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a|b$.

1. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{\zeta(s)k^s}\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est bien la distribution d'une probabilité sur N.

   On suppose dans la suite que :

$$\forall\, k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

2. Soit $a \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbf{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.
3. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbf{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbf{N}^*$.

   Démontrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

   i. l'entier N est divisible parles n entiers a_1, a_2,...., a_n ;

   ii. l'entier N est divisible par le produit $a_1 a_2 .... a_n$.

   Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?
4. En déduire que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des entiers de $\mathbf{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbf{N}^*], \ldots, [X \in a_n\mathbf{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.

   On pourra noter $(b_1, \ldots, b_r)$ une sous-famille de $(a_1, \ldots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$ la suite croissante des nombres premiers.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

2. Soit ω dans $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ converge.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

1. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geq \zeta(s)$.

   Conclure.