

## DM n°6

## Notations et conventions

- Dans ce problème,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- On confond vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et matrice colonne correspondante, ce qui permet des écritures du type  $Ax$  où  $A$  est une matrice carrée réelle de taille  $n$  et  $x$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ .
- Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et si  $x$  est un élément de  $\mathbb{R}^n$ , on note

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

ce qui, compte tenu de la convention précédente, s'écrit aussi

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si  $i$  et  $j$  sont deux entiers de  $[[1, n]]$ , la  $j$ -ème dérivée partielle de  $f_i$  en  $x$  est notée  $\partial_j f_i$  ou a  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$

- Le déterminant d'une matrice carrée  $A$  est noté  $\det(A)$ .
- Avec les notations précédentes, on appelle matrice jacobienne de  $f$  en  $x$  et on note  $J_f$  la matrice carrée réelle de taille  $n$  dont le terme situé sur la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne est  $\partial_j f_i$ ,
- On appelle jacobien de  $f$  en  $x$  et on note  $\text{jac}_f(x)$ , le déterminant  $\det(J_f(x))$  de la matrice jacobienne  $J_f(x)$ .
- On appelle divergence de  $f$  en  $x$  et on note  $\text{div}_f(x)$ , la trace de la matrice jacobienne  $J_f(x)$ . On a donc

$$\text{div}_f(x) = \text{tr}(J_f(x)) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i(x)$$

*Les quatre parties sont pour une large part indépendantes les unes des autres.*

## I Une interprétation du jacobien

**I.A** Soit  $A$  une matrice carrée réelle de taille  $n$  et  $b$  un élément de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = Ax + b$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et préciser sa matrice jacobienne  $J_f(x)$  en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**I.B** Dans cette section,  $g$  désigne une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

On fixe un élément  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $\varphi$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(t) = g(ta) = g(ta_1, ta_2, \dots, ta_n)$$

**I.B.1)** Justifier que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout réel  $t$ , donner  $\varphi'(t)$ .

**I.B.2)** En déduire qu'au voisinage de 0

$$g(ta) = g(0) + t(a_1\partial_1g(0) + a_2\partial_2g(0) + \dots + a_n\partial_ng(0)) + o(t)$$

**I.C** Dans cette section,  $f$  désigne une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $f(0) = 0$ .

Pour  $t$  réel et  $j$  entier de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $t_j$  l'élément  $(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{R}^n$ , le réel  $t$  étant situé au rang  $j$ .

**I.C.1)** On admettra que si des fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , alors la fonction  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\Phi(t) = \det(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ .

En utilisant la question I.B.2 et la multilinéarité du déterminant, montrer qu'au voisinage de 0

$$\det(f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_n)) = t^n \text{jac}_f(0) + o(t^n)$$

**I.C.2)** En déduire que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(f(t_1), \dots, f(t_n))}{\det(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \text{jac}_f(0)$$

**I.C.3)** Dans le cas  $n = 2$  (respectivement  $n = 3$ ), donner une interprétation géométrique de la valeur absolue du jacobien de  $f$  en 0 à l'aide d'aires de parallélogrammes (respectivement volumes de parallélépipèdes).

## II Une interprétation de la divergence dans un cas particulier

On désigne par  $A$  une matrice réelle carrée de taille 2 et on pose, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = Ax$ .

**II.A** – Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}^2$ , exprimer  $\text{div}_f(x)$  à l'aide de  $A$  seulement.

Pour  $a$  dans  $\mathbb{R}^2$ , on note  $u_a(t)$  la solution sur  $\mathbb{R}$  du problème de Cauchy

$$X' = AX, \quad X(0) = a$$

Autrement dit,  $u_a$  est l'unique fonction  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $u_a(0) = a$  et, pour tout réel  $t$ ,  $u'_a(t) = Au_a(t)$ .

**II.B** –

Dans cette section et la suivante, on suppose  $A$  diagonale de la forme

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

**II.B.1)** Que vaut  $u_a(t)$  ?

**II.B.2)** Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $t$  un réel. Montrer que

$$\det(u_a(t), u_b(t)) = \exp(t \text{div}_f(a)) \det(u_a(0), u_b(0))$$

**II.B.3)** Utiliser le résultat précédent pour interpréter le signe de  $\text{div}_f(a)$  en termes de sens de variation de l'aire d'un certain parallélogramme comme fonction de  $t$ .

**II.C** – *Exemple* On suppose toujours que  $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ .

**II.C.1)** On pose  $a = (a_1, a_2)$  et  $u_a(t) = (x_1(t), x_2(t))$ . On suppose que  $\lambda_1 \neq 0$  et  $a_1 > 0$ . Déterminer une fonction  $\theta_a$  telle que  $x_2(t) = \theta_a(x_1)$  pour tout réel  $t$ .

**II.C.2)** Dans cette question,  $a = (2, 1)$  et  $b = (1, 2)$ .

Pour chacun des cas suivants, illustrer sur une même figure les courbes représentatives des fonctions  $\theta_a$ ,  $\theta_b$  et  $\theta_{a+b}$  ainsi que les parallélogrammes de sommets  $(0, 0)$ ,  $u_a(t)$ ,  $u_b(t)$  et  $u_a(t) + u_b(t)$  pour  $t = 0$  et une valeur de  $t$  strictement positive.

a)  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$ .

b)  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -2$ .

c)  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -1$ .

**II.D –**

**II.D.1)** Reprendre les questions II.B.1 et II.B.2 dans le cas où  $A$  est triangulaire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

**II.D.2)** Montrer que la relation

$$\det(u_a(t), u_b(t)) = \exp(t \operatorname{div}_f(a)) \det(u_a(0), u_b(0))$$

est valable lorsque la matrice  $A$  possède un polynôme caractéristique scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**II.D.3)** Étendre ce résultat au cas d'une matrice réelle  $2 \times 2$  quelconque.

### III Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

Dans le début de cette partie  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même. Si  $x$  est un élément de  $\mathbb{R}^n$ , on note toujours

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si  $i, j$  et  $k$  sont trois entiers de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la dérivée partielle seconde de  $f_k$  en  $x$  par rapport aux variables  $x_i$  et  $x_j$  est notée  $\partial_{i,j} f_k(x)$  ou  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ , ou encore  $f_{i,j,k}(x)$ .

**III.A** Justifier que, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^{*n}$  et tous  $i, j$  et  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $f_{i,j,k}(x) = f_{j,i,k}(x)$ .

**III.B** Dans cette section, on suppose que la matrice jacobienne  $J_f$  est antisymétrique pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**III.B.1)** Montrer que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et tous  $i, j$  et  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x)$ .

**III.B.2)** En déduire que, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tous  $i, j$  et  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $f_{i,j,k}(x) = 0$ .

**III.B.3)** Montrer qu'il existe une matrice carrée réelle  $A$  de taille  $n$  et un élément  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = Ax + b$ .

Justifier que  $A$  est antisymétrique.

**III.B.4)** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur  $f$ , la matrice jacobienne  $J_f(x)$  est-elle antisymétrique pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  ?

**III.C** Maintenant  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même.

Montrer que la matrice jacobienne  $J_f$  est symétrique pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si il existe  $g$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_i(x) = \partial_i g(x)$$

On pourra considérer l'application  $g$  définie par  $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx) dt$  et on exprimera  $\partial_i g(x)$  sous forme d'une seule intégrale.

## IV Matrice jacobienne orthogonale

Dans cette partie,  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même.

On considère la proposition

( $\mathcal{P}$ ) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , la matrice jacobienne  $J_f(x)$  de  $f$  est orthogonale.

Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $i, j, k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note

$$\alpha_{i,j,k}(x) = \sum_{p=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

**IV.A** – On suppose ( $\mathcal{P}$ ).

**IV.A.1)** Montrer que pour tous  $i, j$  et  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$ .

**IV.A.2)** En déduire que pour tous  $i, j$  et  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\alpha_{i,j,k} = 0$ .

**IV.A.3)** Montrer qu'il existe une matrice orthogonale  $A$  et un élément  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = Ax + b$

On pourra interpréter les relations  $\alpha_{i,j,k} = 0$  à l'aide de produits matriciels.

**IV.B** – Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même.

À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur  $f$ , la proposition ( $\mathcal{P}$ ) est-elle réalisée ?

**IV.C** – Si  $g$  est une fonction de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , on note  $\Delta_g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$  (laplacien de  $g$  en  $x$ ).

Montrer que ( $\mathcal{P}$ ) est équivalente à la proposition

( $\mathcal{Q}$ ) Pour toute fonction  $g$  de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\Delta_{g \circ f} = (\Delta_g) \circ f$ .