

# Caractères

Ce problème est tiré en grande partie du bel article [Tosel, 2017].

Dans toute la suite,  $(G, +)$  désignera un groupe abélien fini, dont le neutre sera noté  $0$ . L'ordre d'un élément  $g$  de  $G$  sera noté  $\omega(g)$ .

## I. EXPOSANT D'UN GROUPE

1. Soient  $g$  et  $g'$  des éléments de  $G$  d'ordres respectifs  $m$  et  $m'$ . On suppose que  $m$  et  $m'$  sont premiers entre eux. Montrer que

$$\omega(g + g') = mm'.$$

Si l'on ne suppose plus  $m$  et  $m'$  premiers entre eux, a-t-on  $\omega(g + g') = \text{ppcm}(m, m')$  ?

2. Soit  $a$  et  $b$  des entiers strictement positifs. Montrer l'existence de  $a'$  et  $b'$  entiers également strictement positifs tels que on ait :
  - Les relations de divisibilité  $a'|a$ ,  $b'|b$  ;
  - $\text{pgcd}(a'b') = 1$  ;
  - $\text{ppcm}(a, b) = a'b'$ .

*Indication* : On examinera les décompositions en facteurs premiers de  $a$  et  $b$ .

3. On appelle exposant du groupe  $G$  le plus petit commun multiple  $e$  des ordres des ses éléments. Montrer que  $G$  admet un élément  $z$  ayant pour ordre l'exposant du groupe  $G$ .

Dans toute la suite on désignera par  $e$  l'exposant de  $G$ .

Pour tout élément  $g$  de  $G$ ,  $\delta_g$  désignera l'indicatrice du singleton  $\{g\}$ , la famille,  $(\delta_g)_{g \in G}$  est alors une base du  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}^G$ . Nous munirons  $\mathbf{C}^G$  de son produit scalaire canonique (normalisé),  $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$ , de norme associée  $\| \cdot \|_G$ , précisément :

$$\forall (u, v) \in (\mathbf{C}^G)^2, \langle u | v \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \bar{u}(g)v(g).$$

## II. CARACTÈRES, CAS DES GROUPE CYCLIQUES

**Définition** — On appelle caractère de  $G$  tout morphisme du groupe  $(G, +)$  dans le groupe  $(\mathbf{C}^*, \times)$ .

1. Montrer que tout caractère  $\chi$  de  $G$  est à valeurs dans  $\mathbf{U}_e$ , groupe des racines  $e^e$  de l'unité, où toujours,  $e$  désigne l'exposant de  $G$ .
2. Montrer que l'ensemble des caractères de  $G$  est un groupe pour la multiplication usuelle des applications à valeurs complexes.

On appelle ce groupe *groupe dual* de  $G$  et on le note  $\hat{G}$ . Nous désignerons par  $\chi_0$  l'élément neutre de  $\hat{G}$  appelé caractère « trivial ».

3. CAS D'UN GROUPE CYCLIQUE —

On suppose dans cette question que  $G$  est cyclique d'ordre  $n$  et que  $x$  en est un générateur.

Montrer que pour tout élément  $\omega$  de  $\mathbf{U}_n$ , la formule :

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \chi_\omega(k \cdot x) = \omega^k$$

définit sans ambiguïté un caractère  $\chi_\omega$  et que l'application

$$\mathbf{U}_n \rightarrow \hat{G}; \omega \mapsto \chi_\omega$$

est un isomorphisme de  $\mathbf{U}_n$  sur  $\hat{G}$ .

Afin de prouver que dans le cas général  $G$  et  $\hat{G}$  sont encore isomorphes, nous allons donner un théorème de structure, dû à Kronecker, pour les groupes abéliens finis

### III. STRUCTURE DES GROUPES ABELIENS FINIS

L'objet de cette partie et la preuve, grâce aux caractères du théorème suivant.

**Théorème de Kronecker** — Si  $G$  est un groupe abélien fini non trivial il existe un entier  $r$  strictement positif, des entiers  $d_1, d_2, \dots, d_r$  supérieurs ou égaux à 2 tels que l'on ait<sup>1</sup> :

- Chaque entier  $d_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, r$ , divise le suivant :  $d_1 | d_2 | \dots | d_r$  ;
- Le groupe  $G$  est isomorphe au groupe produit  $\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/d_2\mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}/d_r\mathbf{Z}$ .

#### 1. PROLONGEMENT D'UN CARACTÈRE

- (a) Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  et  $x$  un élément de  $G$  qui n'est pas élément de  $H$ . On note  $K$  le sous-groupe engendré par  $H$  et  $x$  :

$$K = \langle H \cup \{x\} \rangle.$$

Soit  $\Lambda = \{p \in \mathbf{Z} | p \cdot x \in H\}$ . Montrer qu'il existe  $a \in \mathbf{N}^*$  tel que  $\Lambda = a\mathbf{Z}$ . En déduire que

$$K = \{p \cdot x + h, (p, h) \in \{0, 1, \dots, a-1\} \times H\},$$

et que l'écriture d'un élément  $k$  de  $K$  de la forme  $k = p \cdot x + h$ , avec  $(p, h)$  élément de  $\{0, 1, \dots, a-1\} \times H$  est unique.

- (b) Posons  $m = \frac{|K|}{|H|}$ . Soit  $\phi$  un caractère de  $H$ . Montrer que  $\phi$  se prolonge à  $K$  en  $m$  et seulement  $m$  caractères.
- (c) Montrer que le caractère  $\phi$  de  $H$  se prolonge en un caractère  $\chi$  de  $G$ .
2. Soit  $z_e$  un élément de  $G$  d'ordre  $e$ , exposant du groupe. Soit  $\phi_{z_e}$  le caractère du groupe cyclique  $\langle z_e \rangle$ , défini comme en II.3., par :

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \phi_{z_e}(k \cdot z_e) = \omega^k,$$

avec  $\omega = e^{\frac{i2\pi}{e}}$ , et  $\chi_e$  un prolongement de  $\phi_{z_e}$  en un caractère de  $G$ .

- (a) Déduire de la question précédente que le groupe  $G$  est isomorphe au groupe produit  $\mathbf{Z}/e\mathbf{Z} \times \text{Ker}(\chi_e)$ .
- (b) Démontrer le théorème de Kronecker.

### IV. GROUPE DUAL

1. Soient  $G_1$  et  $G_2$  des groupes abéliens finis, montrer que  $\widehat{G_1 \times G_2}$  est isomorphe à  $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ .  
*Indication* : On pourra introduire pour tout couple de caractères  $(\chi_1, \chi_2) \in G_1 \times G_2$ , le produit tensoriel de  $\chi_1$  et  $\chi_2$  :

$$\chi_1 \otimes \chi_2 : G_1 \times G_2 ; (g_1, g_2) \mapsto \chi_1(g_1)\chi_2(g_2).$$

2. Montrer que les groupes  $G$  et  $\hat{G}$  sont isomorphes.
3. ISOMORPHISME CANONIQUE ENTRE  $G$  ET SON BIDUAL —  
 Pour tout  $x$  élément de  $G$  on définit :

$$\eta_x : \hat{G} \rightarrow \mathbf{C} ; \chi \mapsto \chi(x).$$

Montrer que  $\eta : G \rightarrow \mathbf{C}^{\hat{G}} ; x \mapsto \eta_x$  induit un isomorphisme de  $G$  sur  $\hat{G}$ . On dit que  $\eta$  est l'isomorphisme canonique de  $G$  sur son bidual.

---

1. On a aussi unicité de la décomposition suivante, c'est un bel exercice !

## V. ORTHOGONALITÉ

1. Soit  $\chi$  un caractère non trivial de  $G$ . Montrer que :

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

Tout caractère non trivial est orthogonal au caractère trivial.

2. Dédurre de la précédente question que les caractères forment une base orthonormée de  $\mathbf{C}^G$ .
3. Donner pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $G$  la valeur de la somme :

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \bar{\chi}(x) \chi(y).$$

*Indication* : Utiliser IV.3.

## VI. UN PEU D'ALGÈBRE LINÉAIRE

On se propose de montrer que  $|G| = |\hat{G}|$ , corollaire immédiat de 4.2., par un argument d'algèbre linéaire.

1. Pour tout  $x \in G$  définissons  $T_x$  endomorphisme de  $\mathbf{C}^G$ , dit de *translation*, par :

$$T_x(u) : G \rightarrow \mathbf{C}; y \mapsto u(x + y),$$

pour toute application  $u$  de  $G$  dans  $\mathbf{C}$ . Montrer que pour tout élément  $x$  de  $G$ ,  $T_x$  est élément de  $\text{GL}(\mathbf{C}^G)$  et que les caractères de  $G$  sont des vecteurs propres de  $T_x$ .

2. Montrer que l'application

$$T : G \rightarrow \text{GL}(\mathbf{C}^G); x \mapsto T_x$$

est un morphisme de groupes.

On dit que  $T$  est une *représentation linéaire* de  $G$ .

3. Montrer que la famille d'endomorphismes de  $\mathbf{C}^G$ ,  $(T_x, x \in G)$  est codiagonalisable, c'est à dire qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbf{C}^G$  dont les vecteurs sont vecteurs propres pour tous les  $T_x$ ,  $x \in G$ .
4. Montrer que tout vecteur de  $\mathcal{B}$  est colinéaire à un caractère.
5. En utilisant V., montrer que  $|\hat{G}| = |G|$ .

## VII. DUALITÉ

En algèbre linéaire, les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie sont l'intersection de noyaux de formes linéaires (hyperplans), nous allons ici décrire les sous-groupes de  $G$  comme des intersections de noyaux de caractères.

1. Soit  $X$  une partie de  $G$ . On note  $X^\perp$  l'ensemble des caractères de  $G$  qui prennent la valeur 1 sur  $X$  :

$$X^\perp = \{\chi \in \hat{G} \mid X \subset \text{Ker}(\chi)\}.$$

Soit  $H$  un sous groupe de  $G$ . Montrer que :

$$H = \bigcap_{\chi \in H^\perp} \text{Ker}(\chi).$$

2. Soit le morphisme de restriction,

$$R : \hat{G} \rightarrow \hat{H}; \chi \mapsto \chi|_H.$$

Montrer que  $\chi$  est surjectif et déterminer son noyau.

En déduire que  $|G| = |H| \times |H^\perp|$ .

### TRANSFORMATION DE FOURIER

A toute application  $f$  de  $G$  dans  $\mathbf{C}$ , on associe sa transformée de Fourier, application de  $\hat{G}$  dans  $\mathbf{C}$  donnée par :

$$\hat{f} : \hat{G} \rightarrow \mathbf{C}; \chi \mapsto \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)} f(x).$$

1. Exprimer pour tout  $(f, \chi) \in G \times \hat{G}$ ,  $\hat{f}(\chi)$  au moyen du produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$ . Calculer  $\hat{\delta}_g$ , pour tout élément  $g$  de  $G$ .

2. FORMULE D'INVERSION —

Pour tout  $f \in \mathbf{C}^G$  et tout  $x \in G$ , montrer que :

$$f(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x).$$

3. FORMULE DE PARSEVAL — Montrer que pour tout élément  $f$  de  $\mathbf{C}^G$ , on a

$$\|f\|_G = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \|\hat{f}\|_{\hat{G}}.$$

*Cette égalité exprime que si  $\mathcal{F}$  est la transformation de Fourier, c'est-à-dire l'application de  $\mathbf{C}^G$  dans  $\mathbf{C}^{\hat{G}}$  qui à  $f$  associe  $\hat{f}$ , alors  $\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{|G|}}$  est une isométrie de  $(\mathbf{C}^G, \|\cdot\|_G)$  dans  $(\mathbf{C}^{\hat{G}}, \|\cdot\|_{\hat{G}})$ .*

4. PRODUIT DE CONVOLUTION — Pour tout couple  $(f, g)$  d'éléments de  $\mathbf{C}^G$  on définit leur produit de convolution  $f * g$  par :

$$f * g : G \rightarrow \mathbf{C}; x \mapsto \sum_{y \in G} f(x - y)g(y).$$

On montre sans mal, et ce n'est pas demandé, que  $(\mathbf{C}^G, +, \cdot, *)$  est une algèbre commutative de neutre  $\delta_0$ . Montrer pour tout  $(f, g) \in (\mathbf{C}^G)^2$  que :

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}.$$

5. Soit  $f \in \mathbf{C}^G$ . Pour tout  $u \in \mathbf{C}^G$ , on note  $C_f(u) = u * f$ . Montrer que  $C_f$  est un endomorphisme de  $\mathbf{C}^G$  et que tout caractère de  $G$  est un vecteur propre de  $C_f$  associé à une valeur propre à déterminer.

6. On soit  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$  une énumération des éléments de  $G$  et  $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$  une de  $\hat{G}$ . Montrer que

$$\det(C_f) = \det(f(x_i - x_j))_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} = \prod_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi).$$

Expliciter cette égalité dans le cas où  $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$  et retrouver un résultat classique.

## Références

[Tosel, 2017] TOSEL, N. (2017). Analyse harmonique sur un groupe abélien fini et principe d'incertitude. *RMS*, octobre(1):32–49.