DM n°4

PROBLÈME

Notations

— Pour tout réel x, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x,
— On désigne par $\#E$ le cardinal, c'est-à-dire le nombre d'éléments, d'un ensemble fini E.

Nous aurons besoin dans ce problème des deux théorèmes suivants que nous admettrons un sera vu en cours d'année.

Définition : *On appelle fonction en escalier sur $[0, 2\pi]$ toute application f de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$, pour laquelle il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_p)$ de $[0, 2\pi]$: $0 = a_0 < a_l < \ldots < a_p = 2\pi$, telle que f soit constante sur chaque intervalle de la forme $]a_i, a_{i+1}[$.*

Théorème 1 : *Soit f une application de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe g fonction en escalier sur $[0, 2\pi]$ telle que $\sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - g_(x)| \leq \varepsilon$.*

Définition : *On appelle polynôme trigonométrique toute application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$*

$$P \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ t \mapsto \sum_{k=-p}^{p} c_k \exp(ikt),$$

avec p une entier naturel et $c_p, \ldots c_{-1}, c_0, c_1, \ldots c_p$ des nombres complexes.

Théorème 2 : *Soit f une application de dans $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ 2π-périodique et continue. Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - P_(x)| \leq \varepsilon$.*

Ce problème étudie les suites équidistribuées :

Définition : *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0, 2\pi]$. On note pour tout élémennt α de $]0, 2\pi]$ et tout entier $N \geq 1$,*

$$F_N(\alpha) = \frac{1}{N}\#\{n \in \{1, 2, \ldots, N\} | u_n \in [0, \alpha[\}.$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée dans $[0, 2\pi]$ (ou plus succintement équidistribuée), si, pour tout $\alpha \in]0, 2\pi]$,

$$F_N(\alpha) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{\alpha}{2\pi}.$$

La première partie établira des propriétés élémentaires des suites équidistribuées et montrera que l'on peut remplacer dans leur définition l'intervalle $[0, \alpha[$ par un intervalle quelconque. Elle établit ensuite une caractérisation intégrale des suites équidistribuées.

La deuxième partie étudie une suite équidistribuée particulière.

La dernière utilise le résultat de la deuxième afin d'évaluer la probabilité qu'une puissance entière de 2 commence par un chiffre donné.

Première partie

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite équidistribuée dans $[0, 2\pi]$.

   (a) Montrer que pour tous α_1 et tout α_2 réels tels que $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2\pi$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N_0 \geq 1$ tel que pour tout entier $N \geq N_0$,

   $$0 \leq F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1) \leq \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} + \varepsilon.$$

   (b) Montrer que pour tout élément α de $[0, 2\pi]$,

   $$\frac{1}{N}\#\{n \in \{1, 2, \ldots, N\} | u_n = \alpha\} \underset{N\to+\infty}{\to} 0,$$

   (on pourra commencer par étudier le cas $\alpha \in]0, 2\pi[$, que l'on traitera soigneusement en utilisant la sous-question précédente, et étudier plus sommairement les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 2\pi$).

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite équidistribuée dans $[0, 2\pi]$.

   (a) On note I un intervalle ouvert inclus dans $[0, 2\pi]$, et $\mathbf{1}_I$ la fonction caractéristique de I, définie par :

   $$\mathbf{1}_I \;:\; [0, 2\pi] \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I, \\ 0, & \text{si } x \notin I, \end{cases}$$

   Montrer que

   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_I(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{|I|}{2\pi},$$

   où $|I|$ est la longueur de I.

   (b) Montrer que pour f fonction en escalier sur $[0, 2\pi]$,

   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

   (c) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbf{R})$. Montrer, en utilisant le théorème 1 que :

   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0, 2\pi]$. On note $\mathbf{E}$ l'ensemble des applications f de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$ telles que :

   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

   (a) soit α un élément de $]0, 2\pi]$. Montrer qu'il existe deux applications de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$, f_- et f_+, continues et vériviant les propriétés suivantes :

      i. $f_+(0) = f_+(2\pi),\ f_-(0) = f_-(2\pi)$;

      ii. $f_- \leq \mathbf{1}_{[0,\alpha[} \leq f_+$;

      ii. $\int_0^{2\pi} f_+(t)\mathrm{d}t - \varepsilon \leq \alpha \leq \int_0^{2\pi} f_-(t)\mathrm{d}t + \varepsilon$.

   La représentation claire et précise des graphes de f_+ et f_- tiendra, sans autres explications, lieu de réponse.

(b) En déduire que si toute application f de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$, continue et prenant des valeurs identiques en 0 et 2π est dans $\mathbf{E}$, alors la suite$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équidistribuée dans $[0, 2\pi]$.

Deuxième partie

Soit $a \in \mathbf{R}$ on définit la suite $(u_n)_{nin\mathbf{N}^*}$ par, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = (na - E(na))2\pi.$$

1. Calculer $\int_0^{2\pi} \exp(ikt)\mathrm{d}t$, pour tout élément k de $\mathbf{Z}$.
2. On suppose que a est irrationnel.
   (a) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{N} \exp(iku_n)$ pour tout élément k de $\mathbf{Z}$.
   (b) Montrer que pour tout polynôme trigonométrique P, on a :
   $$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est équidistribuée.
   Indication : on pourra utiliser le théorème 2.
4. Le nombre a est maintenant élément de $\mathbf{Q}$: $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. En étudiant $\sum\limits_{n=1}^{N} \exp(iku_n)$ et $\int_0^{2\pi} \exp(ikt)\mathrm{d}t$, pour un entier k bien choisi, montrer que la suite$(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'est pas équidistribuée.

Troisième partie
Théorème de Bedford

1. Montrer qu'il existe un réel C (à déterminer), tel que pour tout entier $n \geq 1$:
   $$10^p \leq 2^n < 10^{p+1} \text{ si et seulement si } p = E(nC).$$
2. Soit un entier $n \geq 1$. Montrer que le premier chiffre (à gauche) dans l'écriture décimale de 2^n est k, $(k \in 1, 2, \ldots, , 9)$, si et seulement si :
   $$\ln k \leq n \ln 2 - \ln(10)\mathrm{E}\left(\frac{n \ln 2}{\ln 10}\right) < \ln(k+1).$$
3. Pour tout entier $N \geq 1$ et tout élément k de $1, 2, \ldots, 9$, on note $\mathbf{1}_k(N)$ le nombre d'entiers $n \leq N$, tels que le premier chiffre dans l'écriture décimale de 2^n soit k. Montrer que $\frac{1}{N}\mathbf{1}_k(N)$ tend vers une limite à déterminer lorsque N tend vers $+\infty$.
   (On admettra ici que $\frac{\ln(2)}{\ln(10)}$ est irrationnel.)
4. Interpréter pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{1}_k(N)$ en terme de probabilité, ainsi que la $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbf{1}_k(N)$.

Correction du DM n°4

PROBLÈME

1. (a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Pour $i = 1, 2$, $F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{\alpha_2}{2\pi} - \frac{\alpha_1}{2\pi}$, donc on dispose d'un entier naturel N tel que pour tout entier $N \geq N$,

$$\boxed{F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1) \leq \frac{\alpha_2}{2\pi} - \frac{\alpha_1}{2\pi} + \varepsilon.}$$

L'inégalité $\boxed{0 \leq F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1)}$ est évidente, elle résulte de ce que la famille

$$(\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n \in [0, \alpha[\})_{\alpha\in]0,2\pi]}$$

est croissante pour l'inclusion.

(b) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

• Supposons $\alpha \in]0, 2\pi[$.

on peut trouver α_1 et α_2 des réels tels que :

$$0 < \alpha_1 < \alpha < \alpha_2 < 2\pi \text{ et } < \alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon.$$

D'après (a), on dispose d'un entier N_0 tel que pour tout entier $N \geq N_0$:

$$0 \leq F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1) \leq \frac{\alpha_2}{2\pi} - \frac{\alpha_1}{2\pi} + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Or

$$\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n = \alpha\} \subset \{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n \in [\alpha_1, \alpha_2[\},$$

Donc

$$\frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n = \alpha\} \leq$$

$$\frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n \in [\alpha_1, \alpha_2[\} = F_N(\alpha_2) - F_N(\alpha_1).$$

Donc pour tout entier $N \geq N_0$:

$$0 \leq \frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n = \alpha\} \leq 2\varepsilon.$$

Comme ε ést quelconque,

$$\boxed{\frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N \ |u_n = \alpha\} \underset{N\to+\infty}{\to} = 0.}$$

Supposons $\alpha = 0$.

$$0 \leq \frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n = 0\} \leq \frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n \in [0, \varepsilon[\} = F_N(\varepsilon).$$

Or $F_N(\varepsilon) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{\varepsilon}{2\pi}$ Donc on dispose d'un entier $N_1 \in \mathbf{N}$, tel que pour tout entier $N \geq N_1$,$F_N(\varepsilon) \leq \varepsilon$. Donc pour tout entier $N \geq N_1$

$$0 \leq \frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n = 0\} \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n = 0\} \underset{N\to+\infty}{\to} 0.}$$

Supposons $\alpha = 2\pi$.

Pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n = 2\pi\} = \{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n \in [0, 2\pi]\} - \{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n \in [0, 2\pi[\},$$

et donc

$$\boxed{0 \leq \frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n = 2\pi\} = 1 - F_N(2\pi) \underset{N\to+\infty}{\to} 1 - \frac{2\pi}{2\pi} = 1.}$$

2. (a) prenons pour I, l'intervalle $]a, b[$.

$$\sum_{n=1}^{N} f(u_n) = \#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N \,| u_n \in I\} = \#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N \,| u_n \in [a, b[\}$$
$$-\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N \,| u_n = a\}$$

Donc

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) = F_N(b) - F_N(a) - \frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N \,| u_n = a\}.$$

Donc d'après 1. (b),

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{b-a}{2\pi} - 0 = \frac{|I|}{2\pi}}$$

(b) Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ adaptée à f de sorte que f s'écrive :

$$f = \sum_{i=1}^{p-1} c_i \mathbf{1}_{]a_i, a_{i+1}[} + \sum_{i=1}^{p} d_i \mathbf{1}_{\{a_i\}},$$

où pour toute partie A de $[0, 2\pi]$, $\mathbf{1}_A$ est l'application définie sur $[0, 2\pi]$ qui prend la valeur 1 sur A et 0 sur $[0, 2\pi] \setminus A$ (fonction caractéristique de A)et $c_1, \ldots, c_{p-1}, d_1 \ldots d_p$ des réels.

D'une part, pour $i = 1, \ldots, p-1$, $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{]a_i, a_{i+1}[}(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{a_{i+1}-a_i}{2\pi}$, d'après (a).

D'autre part, pour $i = 1, \ldots, p$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{a_i\}}(u_n) = \frac{1}{N}\#\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N \,| u_n = a_i\} \underset{N\to+\infty}{\to} 0.$$

Par linéarité de la limite,

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{p-1} c_i \frac{a_{i+1}-a_i}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.}$$

3. (a) Les application f_+ et f_- sont représentées ci dessous.

(b) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Avec les notations précédentes pour tout entier $N \geq 1$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_-(u_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=n}^{N} \mathbf{1}_{[0,\alpha[}(u_n) \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_+(u_n)$$

Or par hypothèse $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} f_\pm(u_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\pm(t)\mathrm{d}t$. donc on peut choisir un entier $N_0 \geq 1$ tel que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, si $N \geq N_0$, alors :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\pm(u_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\pm(t)\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Donc pour tout entier $N \geq N_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_-(t)\mathrm{d}t - \varepsilon \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,\alpha[}(u_n) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_+(t)\mathrm{d}t + \varepsilon$$

Donc d'après iii., Donc pour tout entier $N \geq N_0$,

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi} - \varepsilon\right) - \varepsilon \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,\alpha[}(u_n) \leq \left(\frac{\alpha}{2\pi} + \varepsilon\right) + \varepsilon,$$

soit encore $\left|\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,\alpha[}(u_n) - \frac{\alpha}{2\pi}\right| \leq 2\varepsilon$. Donc

$$F_N(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[0,\alpha[}(u_n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Donc <u>la suite$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équidistribuée dans $[0, 2\pi]$.</u>

Deuxième partie

1. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\exp(ikt)$ vaut 1 pour $k=0$ et est nulle pour tout autre valeur de k.

---

2. (a) Soit $k \in \mathbf{Z}$.

- *Premier cas* $k \neq 0$.

$$\sum_{n=1}^{N}\exp(iu_n)=\sum_{n=1}^{N}\exp(ik2\pi(na-E(na)))=\sum_{n=1}^{N}\exp(ik2\pi(na))=\sum_{n=1}^{N}\exp(ik2\pi a)^n$$

par 2π-périodicité de $\exp(i\cdot)$.

Par ailleurs $ik2\pi a \notin 2\pi\mathbf{Z}$ car sinon a serait rationnel, donc $\exp(ik2\pi a)\neq 1$, et donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}\exp(iu_n)=\exp(ik2\pi a)\frac{1-\exp(ik2\pi a)^N}{1-\exp(ik2\pi a)}.}$$

- *Second cas* $k=0$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}\exp(iu_n)=\sum_{n=1}^{N}1=N}.$$

(b) Soit P un polynôme trigonométrique. Il existe donc des complexes c_k, $k=-p,\dots,0,\dots,p$ tels que

$$P=\sum_{k=-p}^{p}c_k\exp(ik\,\cdot).$$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(u_n)=\sum_{k=-p}^{p}c_k\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(iu_n).$$

Or d'après (a) pour un entier $k\neq 0$

$$0\leq\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(iu_n)\right|\leq\frac{1}{N}\times 1\times\frac{1+1}{|1-\exp(ik2\pi a)|}\underset{N\to+\infty}{\to}0,$$

et donc $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}\exp(iu_n)\underset{N\to+\infty}{\to}0$. Donc

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(u_n)\underset{N\to+\infty}{\to}c_0.$$

Par ailleurs, d'après 1. :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=-p}^{p}c_k\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(ik2\pi t)\mathrm{d}t=c_0.$$

Finalement

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}P(u_n)\underset{N\to+\infty}{\to}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(t)\mathrm{d}t}$$

3. Soit f une application de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$ continue et prenant des valeurs identiques en 0 et en 2π.

   f se prolonge à $\mathbf{R}$ en une application 2π-périodique continue encore notée f.

   Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Prenons,grâce au théorème 2, P, Polynôme trigonométrique tel que
$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$
   On a pour tout $N \in \mathbf{N}$:
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n)\right| +$$
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\right|.$$
   • D'une part $\left|\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} f(u_n) - \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} P(u_n)\right| \leq \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} |f(u_n) - P(u_n)| \leq \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} \varepsilon = \varepsilon.$

   • D'autre part $\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - P(t)|\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon\mathrm{d}t = \varepsilon$.

   • Enfin d'après I. 3. (b) on peut trouver un entier $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $N \geq N_0$,
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(u_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon.$$
   Finalement pour tout entier $N \geq N_0$, $\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\right| \leq 3\varepsilon$; ε étant quelconque :
$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$
   D'après I. 3., on a donc que $\underline{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est équidistribuée dans } [0, 2\pi].}$

4. Le nombre a étant de $\mathbf{Q}$: $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.

   D'après 1., $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(iqt) = 0$, mais $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp(iqu_n) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1 = 1$, Donc en particulier On n'a pas $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} f(u_n) \underset{N\to+\infty}{\to} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$, pour f l'application continue $\cos(q\cdot)$.

   $\underline{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ n'est pas équidistribuée dans } [0, 2\pi].}$

Troisième partie
Théorème de Bedford

1. Par croissance du logarithme si $10^p \leq 2^n \leq 10^{p+1}$ alors
$$p \leq \frac{\ln 2}{\ln 10} n < p + 1,$$
   et donc $\boxed{p = E\left(\frac{\ln 2}{\ln 10} n\right)}$.

   Remarque : la réciproque est vraie et est tout aussi simple à prouver que le sens direct.

2. Supposons que le premier chiffre de 2^n soit k et que l'écritue de 2^n nécessite q chiffres. Alors $10^{q-1} \leq 2^n < 10^q$. D'après 1. $q-1 = E\left(\frac{\ln 2}{\ln 10}n\right)$. Par ailleurs $k10^{q-1} \leq 2^n < (k+1)10^{q-1}$. Donc en passant au logarithme (qui continue de croitre) et compte tenu de la précédente égalité : :

$$\ln(k) \leq n\ln 2 - \ln(10)E\left(\frac{\ln 2}{\ln 10}n\right) < \ln(k+1).$$

3. Posons $a := \frac{\ln 2}{\ln 10}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n := \ln 10\left(n\frac{\ln 2}{\ln 10} - E\left(\frac{\ln 2}{\ln 10}n\right)\right)$ et enfin $u_n := 2\pi\left(n\frac{\ln 2}{\ln 10} - E\left(\frac{\ln 2}{\ln 10}n\right)\right)$ de sorte que $u_n = 2\pi(na - \mathbf{E}(na))$ et que $u_n \in [0, 2\pi]$.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, le premier chiffre de 2^n est k si et seulement si $\ln k \leq v_n < \ln(k+1)$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\frac{2\pi}{\ln 10}\ln k \leq u_n < \frac{2\pi}{\ln 10}\ln(k+1).$$

   Or l'irrationalité de a dit que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est équidistribuée dans $[0, 2\pi]$ (cf. II). Donc

$$\frac{1}{N}\mathbf{1}_k(N) = \frac{1}{N}\#\left\{n \in \mathbf{N}^*, n \leq N | u_n \in \left[\frac{2\pi}{\ln 10}\ln k, \frac{2\pi}{\ln 10}\ln(k+1)\right[\right\} =$$

$$F_N\left(\frac{2\pi}{\ln 10}\ln(k+1)\right) - F_N\left(\frac{2\pi}{\ln 10}\ln k\right).$$

   L'équirépartition assure que : $\boxed{\frac{1}{N}\mathbf{1}_k(N) \underset{N\to+\infty}{\to} = \frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln 10}}$.

4. $\mathbf{1}_k(N)$ est le rapport du nombre d'entiers strictement positifs $n \leq N$ pour lesquels le premier chiffre de 2^n est k sur le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à N, c'est-à-dire la probabilité que pour n élément de $\{1, N\}$, muni de la probabilité uniforme, 2^n ait pour premier chiffre k, sa limite, $\frac{\ln(k+1)-\ln k}{\ln 10}$, représente la probabilité pour que, pour un entier $n \geq 1$, 2^n commence par k, <u>cette quantité décroît avec k.</u>