DM n°5

Ce Problème est composé d'un exercice et d'un court problème qui ont en partie des préoccupations communes.

Exercice

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réels non nuls , nous dirons que le produit infini associé à la suite, noté $\prod a_n$ converge si par définition la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où pour tout entier naturel n, $P_n := \prod_{k=0}^{n} a_k$, converge vers une limite *non nulle*.

1. Montrer que si le produit converge alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

   On suppose dans la suite cette condition réalisée. On pose pour tout entier naturel n, $u_n = a_n - 1$ et l'on suppose que : $u_n \neq -1$, cest-à-dire que a_n est non nul, pour tout entier naturel n.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geq n_0$, la quantité $\ln(1+u_n)$ est définie. Montrer que le produit $\prod a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(1+u_n)$ converge.

   Dans la suite, on supposera que $\ln(1+u_n)$ est défini pour tout $n \geq 0$.

   Attention ! *Nous insistons sur le fait que $\prod a_n$ n'est pas un réel et que des expressions du type* $\ln\left(\prod_{n\geq n_0} a_n\right)$ *n'ont rigoureusement aucun sens.*

3. On suppose en outre, dans cette question, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe fixe à partir d'un certain rang. Montrer que le produit $\prod a_n$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature.
4. On ne suppose plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe fixe à partir d'un certain rang, mais que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que le produit converge si et seulement si la série $\sum u_n^2$ converge.
5. Déterminer la nature des produits infinis suivants :
   (a) $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$.
   (b) $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$, où x est un élément de $]-\pi,\pi[$.
   (c) $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{x}{n}\right)\exp\left(-\frac{x}{n}\right)$, où x est un élément de $\mathbf{R}_+^*$.
6. Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par p_n le n-ième nombre premier. On se propose démontrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge [1].

   On note $(p_n)_{n\geq 1}$, la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant :

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11\ldots$$

   (a) Soit un entier $p \geq 2$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p^k}$.

1. Cela signifie qu'il y a pas mal de nombres premiers ! A titre de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}$ converge.

(b) Soient une entier $N \geq 2$ et un entier $M \geq 1$. Déduire de la sous question précédente que :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_N)\in\{0,1,\dots,M\}^N} \frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N}}.$$

(c) Montrer que le produit $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ diverge.

(d) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge.

PROBLÈME

On considère dans ce problème la fonction

$$zta\ :]1,+\infty[\to \mathbf{R}\,;\ x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x},$$

dite *fonction zéta de Riemann.*

Partie I – Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

1. Démontrer que la fonction ζ est décroissante.
2. (5/2) La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1,+\infty[$?
3. (5/2) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. Montrer que ζ admet une limite en $+\infty$. À l'aide d'une comparaison à une intégrale déterminer cette limite.
5. Déterminer un équivalent de ζ au voisinage de 1.
6. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*$ et d x unb réel stritement supérieur à 1. Justifier que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}.$$

On pourra considérer la famille $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de parties de A où pour tout entier $n \geq 1$:

$$A_n = \{(a,b)\in A,\ ab = n\}.$$

Partie II – Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. Soit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a|b$.

1. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{\zeta(s)k^s}\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est bien la distribution d'une probabilité sur N.

   On suppose dans la suite que :

$$\forall\, k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)k^s}.$$

2. Soit $a \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbf{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.
3. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbf{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbf{N}^*$.

   Démontrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

   i. l'entier N est divisible par a_1, a_2,...., a_n ;

   ii. l'entier N ets divisible par le produit $a_1 a_2 .... a_n$.

   Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?
4. En déduire que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des entiers de $\mathbf{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbf{N}^*], \ldots, [X \in a_n\mathbf{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.

   On pourra noter $(b_1, \ldots, b_r)$ une sous-famille de $(a_1, \ldots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$ la suite croissante des nombres premiers.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

2. Soit ω dans $\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$ converge.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

1. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geq \zeta(s)$.

   Conclure.

FIN

Correction pour DM n°5

Exercice

1. Notons pour commencer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant à valeurs *non nulles*, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n = \prod_{p=0}^{n} a_p \neq 0$ et donc $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ est bien défini.

   Supposons que $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge. Il existe un réel non nul L tel que $P_n \underset{n\to+\infty}{\to} L$. Alors $P_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} L$, puisque $(P_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Et donc

$$a_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{P_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

   Donc

$$\underline{a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1.}$$

2. — Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, en particulier, nous disposons de $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, si $n \geq n_0$, alors $|a_n - 1| < 1$. Pour tout $n \geq n_0$ on a $a_n > 0$.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\prod_{p=0}^{n} a_p = \prod_{p=0}^{n_0-1} a_p \prod_{p=n_0}^{n} a_p$, avec la convention qu'un produit vide vaut 1. Or $\prod_{p=0}^{n_0-1} a_p$ est un réel *non nul*. Donc la suite $\left(\prod_{p=0}^{n} a_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite non nulle si et seulement si la suite $\left(\prod_{p=n_0}^{n} a_p\right)_{n\geq n_o}$ converge vers une limite non nulle. Autrement dit, les produits $\prod_{n\geq 0} a_n$ et $\prod_{n\geq n_0} a_n$ sont de même nature.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\prod_{p=n_0}^{n} a_p = \exp\left(\sum_{p=n_0}^{n} \ln(a_p)\right), \tag{1}$$

   ou de façon équivalente,

$$\ln\left(\prod_{p=n_0}^{n} a_p\right) = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(a_p). \tag{2}$$

   — *Supposons que la série* $\sum_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ *converge.*

   L'égalité (1) et la continuité de la fonction exponentielle en $\sum_{p=n_0}^{+\infty} \ln(a_p)$ assurent la convergence de la suite $\left(\prod_{p=n_0}^{n} a_p\right)_{n\in\mathbf{N}}$ vers $\exp\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(a_n)\right)$, réel non nul. Donc par la remarque initiale $\prod_{n\geq 0} a_n$ converge.

— *Supposons que le produit* $\prod_{n\geq 0} a_n$ *converge.*

Alors $\prod_{n\geq n_0} a_n$ converge, cf. remarque et alors d'après (2) et la continuité du logarithme en $\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, réel non nul, on déduit que la série $\sum_{n\geq n_0} \ln(a_n)$ converge de somme $\ln\left(\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n\right)$.

Conclusion :
la série $\sum_{n\geq n_0} a_n$ converge si et seulement si le produit $\prod_{n\geq 0} \ln(a_n)$ converge.

3. — *Supposons que le produit infini* $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ *converge.*

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1+u_n > 0$, la question 1.a. dit que $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge.

Par ailleurs la convergence du produit assure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (cf. 1.), donc

$$0 \leq \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \tag{3}$$

Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

— *Supposons que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

On a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc (3) est vérifiée et donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n)$ converge. La question 3 assure donc que le produit $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge.

Conclusion :
le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\ln(a_n) = u_n - b_n$, ou $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}u_n^2$. Par comparaison de séries positives $\sum b_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge. Donc, puisque $\sum u_n$ converge, $\sum \ln(a_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

Donc, par 2. $\sum u_n$ converge, $\prod(a_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.

5. *Remarque* : Les trois produits que nous allons étudier dans cette question sont associés à des suites indicées par $\mathbf{N}^*$. D'après le 2. ils sont de même nature que les produits associés aux suites prolongées à $\mathbf{N}$ par une valeur strictement positive arbitraire en 0. On peut donc leur appliquer les résultats de la question 3.

   a. La série de Riemann $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ converge $(2 > 1)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{1}{4n^2} < 1$.

   Donc d'après 3.c., le produit $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ converge.

   b. Soit $x \in]-\pi, \pi[$. Ecartons le cas trivial où $x = 0$ qui conduit à la convergence du produit, puisque la suite des produits partiels est constante égale à 1.

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{x^2}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ converge puisque $2>1$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}*$, $0<\dfrac{x^2}{\pi^2 n^2}<1$. Donc d'après 3.c., le produit $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$ converge.

c. Soit x un élément de $\mathbf{R}_+^*$. Par stricte positivité et stricte convexité de la fonction l'exponentielle on déduit pour tout $n\in\mathbf{N}^*$,

$$0<\left(1+\frac{x}{n}\right)\exp\left(\frac{-x}{n}\right)<\exp\left(\frac{x}{n}\right)\exp\left(\frac{-x}{n}\right)=1.$$

Donc, en posant, pour tout naturel n, $u_n=1-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\exp\left(\dfrac{-x}{n}\right)$, on a $0<u_n<1$. La question 3 assure donc que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 1}(1+\frac{x}{n})\exp\left(-\frac{x}{n}\right)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge. Par ailleurs

$$0\leq u_n=1-\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)(1-\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)\ (n\to+\infty),$$

donc d'après le théorème de comparaison des série à termes positifs $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge.

Il en résulte que : le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 0}(1+\frac{x}{n})\exp\left(-\frac{x}{n}\right)$ converge .

6. a. La série géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}\frac{1}{p^k}$ converge puisque sa raison $\frac{1}{p}$ est élément de $[0,1[$ et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}.$$

b. Soit N un entier supérieur ou égal à 2. D'après 5.b.

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_1^k}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_2^k}\cdots\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p_N^k}.$$

Soit $M\in\mathbf{N}^*$. L'égalité précédente donne :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)}\geq\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{p_1^k}\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{p_2^k}\cdots\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{p_N^k},$$

soit

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)}\geq\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_N)\in\{0,1,\dots,M\}^N}\frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N}}.$$

c. Soit n un élément de $\{1,\dots N\}$. Puisque $P_N\geq N\geq 2$, les facteurs premiers de n sont éléments de $\{p_1,\dots p_N\}$; de plus si l'on choisit M pour que $2^M\geq N$, dans la décomposition de n en facteurs premiers aucun des exposants des facteurs n'excédera strictement M. Donc l'ensemble $\{1,\dots,N\}$ est inclus dans l'ensemble des éléments de la forme $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_N^{k_N}$ avec $(k_1,k_2,\dots,k_N)\in\{0,1,\dots,M\}^N$.

Pour ce choix de M on a donc, grâce à la dernière inégalité,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_N}\right)} \geq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m}. \tag{4}$$

Or la série $\displaystyle\sum_{m\geq 1} \frac{1}{m}$ diverge, étant à termes positifs, $\displaystyle\sum_{m=1}^{K} \frac{1}{m} \underset{K\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc, d'après (4), $\displaystyle\prod_{m=1}^{K}\left(1-\frac{1}{p_m}\right) \underset{K\to+\infty}{\to} 0$. Le produit $\displaystyle\prod_{m\geq 1}\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$ diverge.

d. Puisque pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $0 < \frac{1}{p_m} < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_m}$ et le produit $\displaystyle\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$ sont de même nature (cf. 3).

Donc d'après c. la série $\displaystyle\sum_{m\geq 1} \frac{1}{p_m}$ diverge. [2]

PROBLÈME

Partie I

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'application f_n décroit, donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la somme partielle d'ordre n de la série définissant ζ décroît et donc ζ décroît, comme limite simple de (S_n).
2. Oh que Non ! Sinon comme f_n admet $\frac{1}{n}$ comme limite en 1, le théorème de la double limite voudrait que la série harmonique fût convergente (et que ζ eût sa somme comme limite en 1) (théorème de la double limite).
3.
4. Comme ζ hérite de la positivité des f_n elle est minorée par zéro, décroissante, elle admet donc une limite ℓ en $+\infty$.

   Pour tout $x \in]1, +\infty[$ par la décroissance de

   $$\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto \frac{1}{t^x}$$

   on a pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,

   $$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

Place pour deux dessins

2. Cela signifie qu'il y a « beaucoup » de nombres premiers, ils ne sont pas, par exemple, clairsemés comme les nombres de la forme 2^n, $n \in \mathbf{N}$, ($\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge).

Donc en laissant tendre N vers $+\infty$:

$$\forall x \in]1,+\infty[, \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1}+1 \tag{5}$$

La seconde inégalité jointe à $\zeta \geq f_1 = 1$ veut que[3] : $\underline{\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1}$

5. l'encadrement (5) nous livre l'équivalence :

$$\underline{\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x-1}.}$$

6. La famille est **POSITIVE**. Dans $\bar{\mathbf{R}}$,

$$+\infty \geq \sum_{a=1}^{+\infty}\left(\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{(ab)^x}\right) = \sum_{a=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^x}\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{b^x}\right) = \sum_{a=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^x}\right)\zeta(x) = \zeta(x)^2 < +\infty.$$

Donc le théorème de Fubini-Tonelli affirme la sommabilité de $\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$, et :

$$\sum_{(a,b)\in A}\frac{1}{(ab)^x} = \zeta^2(x).$$

Remarquons que $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une famille de parties deux à deux disjointes dont la réunion est A, donc le théorème de sommation par paquets dans le cas positif veut :

$$\begin{aligned}\sum_{(a,b)\in A}\frac{1}{(ab)^x} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{(ab)^x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(a,b)\in A_n}\frac{1}{(n)^x}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{|A_n|}{(n)^x}\right) = \underline{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^x}}.\end{aligned}$$

En effet pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, en notant D_n l'ensemble des diviseurs positifs de n,

$$A_n = \left\{\left(d, \frac{n}{d}\right), d \in D_n\right\},$$

et donc $|A_n| = |D_n| = d_n$.

Partie II

1. On a :
   — pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ $\frac{1}{\zeta(s)k^s} \geq 0$;
   — $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta(s)k^s} = 1$.

   C'est deux points assurent que la famille $\left(\frac{1}{\zeta(s)k^s}\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est une distribution de probabilité sur $\mathbf{N}^*$.

2. Comme $(X \in a\mathbf{N}^*) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{+\infty}(X = ak)$, on a par σ-additivité,

$$P(X \in a\mathbf{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty}P(X = ak) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta(s)a^sk^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s)a^s},$$

donc $\underline{P(X \in a\mathbf{N}^*) = \frac{1}{a^s}}$.

3. Le théorème de la double limite s'applique aussi très bien.

3. Notons (P_n) le sens non trivial (i. impique ii) de la propriété à montrer.

• Le programme affirme que (P_2) est vraie.

Rappelons la preuve. Supposons que a_1 et a_2, entiers naturels premiers entre eux, divisent N. D'abord n s'écrit $N = q_1 a_1$, avec $q_1 \in \mathbf{N}^*$. Ensuite a_2 divise $q_1 a_1$ et est premier avec a_1, donc divise q_1, merci Carl Friedrich Gauss ! Donc $q_1 = q a_2$ où q est un naturel, si bien que $N = q a_1 a_2$. Et voilà (P_2) prouvée.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons (P_n).

Sopient a_1, a_2,...,a_n+1 des élément de N^*, premiers entre eux deux à deux et divisant N. Alors le programme permet d'affirmer que $a_1 a_2$ est premier avec a_{n+1} et par une récurrence asinitrotante, $a_1 a_2 ... a_n$ et premier avec a_{n+1}.

D'abord (P_n) veut que $(a_1 .... a_n)$ divise N, ensuite (P_2) affirme que $(a_1 ... a_n) a_{n+1}$ divise N.

Et voilà (P_{N+1}) montré.

D'où par récurrence le résultat.

Les entier 3 4 et 2 sont premiers entre eux dans leur ensemble. Ces nombres divisent tous 12, mais leur produit, 4, non !

L'hypothése « premiers entre eux deux à deux » ne peut être affaiblie en « premiers entre eux dans leur ensemble. »

4. Soit $(b_1, b_2, ... b_r)$ une sous-famille de $(a_1, ...a_k)$ (avec $2 \leq r \leq k$). soit $\omega \in \Omega$.

On a que ω est élément de $b_1\mathbf{N}^* \cap ... \cap b_r\mathbf{N}^*$ si et seulement si il est divisible par b_1, b_2,...,b_r, donc par 3, si et seulement si il est divisible par le produit $b_1 b_2 ... b_r$, autrement dit si et seulement il est élément de $b_1 b_2 ... b_r \mathbf{N}^*$.

Donc $(X \in b_1\mathbf{N}^*) \cap ... \cap (X \in b_r\mathbf{N}^*)\Big) = (X \in b_1 b_2 ... b_r \mathbf{N}^*)$.

Donc par 2,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big((X \in b_1\mathbf{N}^*) \cap ... \cap (X \in b_r\mathbf{N}^*)\Big) =& \mathbf{P}(X \in b_1 b_2 ... b_r \mathbf{N}^*)\\ =& \frac{1}{(b_1 b_2 ... b_r)^s} = \frac{1}{b_1{}^s}\frac{1}{b_2{}^s} \cdots \frac{1}{b^{rs}}\\ =& \mathbf{P}(X \in b_1\mathbf{N}^*)\mathbf{P}(X \in b_2\mathbf{N}^*)...\mathbf{P}(X \in b_r\mathbf{N}^*).\end{aligned}$$

D'où la mutuelle indépendance des événements $(X \in a_1\mathbf{N}^*), (X \in a_2\mathbf{N}^*)..., (X \in a_k\mathbf{N}^*)$.

5. On a $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\{X \in p_k\mathbf{N}^*\}}$. Or les événement $\{X \in p_1\mathbf{N}^*\}$,...,$\{X \in p_n\mathbf{N}^*\}$ sont mutuellement indépendants puisque les p_1,...p_n sont premiers entre eux deux à deux car distincts deux à deux, donc les événements $\overline{\{X \in p_1\mathbf{N}^*\}}$,...,$\overline{\{X \in p_n\mathbf{N}^*\}}$ sont mutuellement indépendants Donc

$$\mathbf{P}(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\overline{\{X \in p_k\mathbf{N}^*\}}) = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \mathbf{P}(X \in p_k\mathbf{N}^*)\Big) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k{}^s}\right).$$

6. Soit $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n$. Alors $X(\omega)$ est un élément de $\mathbf{N}^*$ divisible par aucun nombre premier : $X(\omega) = 1$, et la réciproque est vraie. Donc $P\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n\right) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(s)}$.

Or $(B_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une famille décroissante pour l'inclusion, donc par continuité décroissante,

$$P(B_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Vu la question précédente, on obtient bien $\underline{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(s).}$

7. Supposons que $\displaystyle\sum \frac{1}{p_k}$ converge. Comme, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\ln u_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ et $-\ln\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{p_n}$ car $p_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, par comparaison de séries à termes généraux positif, $\displaystyle\sum_k \ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ converge de somme S, donc, par continuité de l'exponentielle, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$, où $\ell = \exp(S)$. Pour tout réel $s>1$, on a pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$1 < p_k \leq p_k^s,$$

donc $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geq \dfrac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}} \geq 0$ donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$\underline{\forall s>1,\ \ell \geq \zeta(s).}$$

Mais $\zeta(s) \xrightarrow[s\to 1]{} +\infty$, d'après la question 5, et on obtient une contradiction.

C'est donc que $\underline{\displaystyle\sum_{k\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{p_k} \text{ diverge.}}$