Programme de colles n°14

8. ⋆ On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$u_n(x) = (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(....(\sin(x))...))}_{n \text{ fois}}$$

(a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement.

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\|u_n\|_\infty = |u_{n-1}(1)|$.

(b) Déterminer un équivalent de $\|u_n\|_\infty$.

(c) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement.

(e) Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformement.

Indications.

(a) Pour tour réel x notons $(v_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$v_0(x) = x,\ v_{n+1}(x) = \sin(v_n(x)).$$

Ainsi a-t-on l'égalité entre suites d'applications $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (-1)^n(v_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$.
Notons que l'imparité du sinus assure celle de v_n pour tout entier $n \geq 0$.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On a $\leq v_1(x_0) = \sin(x_0) \in [-1, 1]$
Premier cas $v_1(x_0) \in [0, 1]$. La stabilité de $[0, 1]$ par sinus assure que la suite $(v_n(x_0))_{n\geq 1}$ est à valeur dans $[0, 1]$. Or pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\sin(x) \leq x, \tag{1}$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$, donc $(v_n(x_0))_{n\geq 1}$ décroît, minorée par 0, elle converge vers un élément ℓ du fermé $[0, 1]$. mais la fonction sinus est continue, donc ℓ est point fixe de la fonction sinus, donc par (1), $\ell = 0$.
Second cas $v_1(x_0) \in [-1, 0]$. Par imparité des v_n, la suite $(v_n(x_0))_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $[-1; 0]$ et croît vers 0.
Dans les deux cas le suite $(|v_n(x_0)|)_{n\geq 1}$ décroît vers 0. Donc la série alternée $\sum u_n(x_0)$ converge.
La série $\sum u_n$ converge donc simplement sur $\mathbf{R}$.

(b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Supposons que $\sin(x) \in [0, 1]$. Alors

$$v_1(x) \leq 1 = v_0(1).$$

Comme les suite $(v_n(x_0))_{n\geq 1}$ et $(v_n(1))_{n\in\mathbf{N}}$ sont à valeurs dans $[0, 1]$ intervalle sur lequel croît le sinus, par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 \leq v_n(x) \leq v_{n-1}(1).$$

Par imparité si $\sin(x) \in [1, 0]$ alors pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$v_{n-1}(1) \leq v_n(x) \leq 0.$$

Dans les deux cas $|v_n(x)| \leq |v_{n-1}(1)|$.
Concluons : pour tout entier $n \geq 2$, $\|u_n\|_\infty = |u_{n-1}(1)|$.

(c) Déjà vu en TD., deux fois, et à refaire.

$$|u_{n-1}(1)| = v_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{3}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

(e) Donc la série à termes positifs $\sum \|u_n|_\infty$ diverge, par comparaison à une série de Riemann
La série $\sum u_n$ ne converge pas normalement.

(e) Pour tout réel x le caractère alternée de $\sum u_n(x)$ et comme $(|u_n(x)|)_{n\geq 1}$ décroît vers 0, on a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq |v_n(1)|.$$

Or la suite $(v_n(1))_{n\in\mathbf{N}}$ est indépendante de x et tend vers 0, donc La série $\sum u_n$ ne converge uniformément.

13.

(a) le caractère dénombrable de E permet d'écrire cet ensemble $E = \{a_i\}_{i\in\mathbf{N}}$. Le caractère borné de la suite $(f_n(a_0))_{n\in\mathbf{N}}$ nous autorise à choisir une extractrice ϕ_0 telle que $(f_{\phi_0(n)}(a_0))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Ensuite grâce au caractère borné de $(f_{\phi_0(n)}(a_1))_{n\in\mathbf{N}}$ on peut choisir une extractrice ϕ_1 tel que $(f_{\phi_0\circ\phi_1(n)}(a_1))_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Plus généralement on construite une suite $(\phi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbf{N}$,

$$(f_{\phi_0\circ\phi_1\circ\ldots\circ\phi(i)(n)}(a_i))_{n\in\mathbf{N}}$$

converge. Soit alors l'application $\psi\ :\ \mathbf{N} \to \mathbf{N}\,;n \mapsto \phi_0 \circ \phi_1 \circ \ldots \circ \phi(n)(n)$.
On montre sans mal que ψ est une extractrice (strictement croissante) et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(f_{\psi(k)})_{k\geq n}$ est une suite extraite de $(f_{\phi_0\circ\phi_1\circ\ldots\circ\phi(n)(k)})_{(k\in\mathbf{N})}$. Donc, pour tout $i \in \mathbf{N}$, $(f_{\psi(k)}(a_n)_{k\in\mathbf{N}}$ converge.
Donc $(f_{\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur E.

(b) La précédente question, appliquée à l'ensemble Q dénombrable, nous offre une extractrice χ telle que $(g_{\chi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $\mathbf{Q}$ vers une application g. Notons pour alléger $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite $(g_{\chi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$.
Notons que g hérite de la croissance des g_n et une adaption aux fonctions définies sur $\mathbf{Q}$ du théorème de la limite mmonotone assure que f admet en tout point x de $\mathbf{R}$ une limite à droite et une limite à gauche.
On montre alors exactement comme pour une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, que pour tout segment J, il existe un nombre au plus dénombrable de point x de J, tels que la limite à droite et à gauche de g en x soient différentes. $\mathbf{R}$ étant réunion dénombrable de segments, il existe un nombre au plus dénombrable de réels x tels que la limite à droite et à gauche de g en x soient différentes. Notons F cet ensemble.
Soit x un irrationnel qui n'est pas élément de F. On note ℓ la valeur commune des limites à droite et gauche de g en x.
Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.
On dispose, par définition des limites à droite et gauche et monotonie de g, de q et q' rationnels tels que :

$$q < x < q' \text{ et } \ell - \varepsilon \leq g(q) \leq \ell \leq g(q') \leq \ell + \varepsilon$$

On dispose également,, par convergence simple de $(h_n)_{n\in_N}$ vers g, de $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![\ |h_n(q) - g(q)| < \varepsilon \text{ et } |h_n(q') - g(q')| < \varepsilon.$$

Alors pour tout entier $n \geq n_0$, par monotonie de h_n :

$$\ell - 2\varepsilon \leq g(q) - \varepsilon \leq h_n(q) \leq h_n(x) \leq h_n(q') \leq g(q') + \varepsilon \leq \ell + 2\varepsilon.$$

Donc $(h_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ convergevers ℓ. Donc $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ simplement sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{E}$.
Par la question (a), dans le cas où E est dénombrable, trivialement dans celui où il est fini, on dispose d'une exctractrice α telle que $(h_{\alpha(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur E .
Alors la suite $(g_{\chi\circ\alpha(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.