DM n°7

Nous allons édudier dans ce DM les séries de Fourier.
La première partie introduit la série de Fourier d'une application continue par morceaux périodique, la deuxième en exprime la somme partielle au moyen d'une intégrale. C'est dans la troisième partie que sera établi un résultat de convergence de la série de Fourier d'une application, sous des hypothèses fortes de régularité (théorème de Dirichlet), enfin la quatrième partie établit la convergence en moyenne de la série de Fourier. Une ultime partie s'adresse aux candidats aux ÉNS.

DÉFINITIONS ET RAPELS

Définition 1. *Soit k un élément de $\mathbf{N}$. Une application f d'un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est dite $\mathcal{C}^k$ par morceaux (continue par morceaux dans le cas où $k=0$) si par définition il existe une subdivision $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de $[a,b]$, telle que pour $i = 0, ..., n-1$ la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable à $[a_i, a_{i+1}]$ en une application de classe $\mathcal{C}^k$.*
En particuier une application $\mathcal{C}^0$ par morceaux admet en tout point une limite à droite et à gauche.

Définition 2. *Soit k un élément de $\mathbf{N}$. Une application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ pérodique de période 2π est dite $\mathcal{C}^k$ par morceaux (continue par morceaux dans le cas où $k=0$) si par définition sa restriction à $[-\pi, \pi]$ l'est.*

Nous aurons besoin du résultat suivant vu en exercice.

Lemme de Lebesgue. *Soit g une application d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ continue par morceaux. Notons $I(\lambda)$, pour tout réel λ, la quantité*

$$\int_{[a,b]} g \sin(\lambda\,.).$$

Alors

$$I(\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

I. SÉRIES DE FOURIER

on note e_n, pour tout élément n de $\mathbf{Z}$, l'application

$$e_n \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{C}\,;\ t \mapsto \exp(int).$$

1. calculer pour tout couple (p,q) d'élément de $\mathbf{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} e_p e_q.$$

2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une famille de complexes. On suppose que la série $c_0 e_0 + \sum\limits_{n\geq 1} c_{-n}e_{-n} + c_n e_n$ converge normalement de somme f.
   Montrer que f est 2π-périodique continue et que pour tout entier relatif n, $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{[0,2\pi]} e_{-n} f$.

Réciproquement si f est une application 2π périodique continue par morceaux on appelle série de Fourier de f la série d'applications

$$c_0(f)e_0 + \sum_{n\geq 1} c_{-n}(f)e_{-n} + c_n(f)e_n,$$

ou pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} e_{-n}f$$

On notera pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n(f)$ la somme partielle d'indice n de cette série d'applications.

Notons que la série de Fourier est définie sans présager de sa convergence, et dans le cas de convergence rien ne dit que sa somme soit f. C'est ces points qui feront l'objet de l'étude qui suit.

On note parfois encore la série de Fourier de f, $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e_n$ et dans le cas de la convergence $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$ l'application somme.

3. Montrer que pour tout application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ continue par morceaux 2π-périodique, $c_n(f) \mapsto 0$ lorsque n tend vers $\pm\infty$.

II. NOYAU DE DIRICHLET

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

Donnons une forme intégrale de la somme partielle de la série de Fourier.

1. Montrer que pour tout élément n de $\mathbf{N}$ et tout réel x,

$$S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, \mathrm{d}t.$$

où D_n désigne l'application

$$D_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C},\ t \mapsto \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt)\right),$$

avec la convention qu'une somme vide est nulle.

D_n s'appelle le noyau de Dirichlet. [1]

2. Montrer, pour tout réel x, que :

$$S_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, \mathrm{d}t.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x non congru à zéro modulo 2π,

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4. Montrer que D_n est 2π-périodique, paire et que :

$$\int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Il est malheureusement impossible sans hypothèses supplémentaires de prouver la convergence de $S_n(f)(x)$ vers $f(x)$. On construit même sans trop de difficultés des éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en un point

1. On dit que S_n est le produit de convolution de D_n par f, noté $D_n \star f$.

III THÉORÈME DE DIRICHLET

On désigne ici par f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On se propose de montrer que pour tout réel x,

$$S_n(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{f(x_{+0})+f(x_{-0})}{2}.$$

En particulier en tout point x de continuité de f, $S_n(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$.

Dans la suite x désigne un réel quelconque et l'on note $\tilde{f}(x) := \frac{f(x_{+0})+f(x_{-0})}{2}$.

1. Montrer le résultat dans le cas où f est une application de classe $\mathcal{C}^1$. On pourra montrer que pour tout réel x l'application

$$[-\pi,\pi]\setminus\{0\} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)},$$

est prolongeable par continuité à $[-\pi,\pi]$ et utiliser le lemme de Lebesgue.

2. (**facultatif**)

   (a) Montrer que :

$$S_n(f)(x)-\tilde{f}(x) = \int_0^\pi \Big(f(x-t)-f(x_{-0})\Big)D_n(t)\mathrm{d}t + \int_0^\pi \Big(f(x+t)-f(x_{+0})\Big)D_n(t)\mathrm{d}t.$$

   (b) Soient les applications :

$$g_- \ :]0,\pi] \to \mathbf{C}\ ;\ t \mapsto \frac{f(x-t)-f(x_{-0})}{\sin(t/2)},$$

$$g_+ \ :]0,\pi] \to \mathbf{C}\ ;\ t \mapsto \frac{f(x+t)-f(x_{+0})}{\sin(t/2)}.$$

   Montrer rapidement que g_- et g_+ admettent un prolongement à $[0,\pi]$ continu par morceaux.

   (c) Montrer que l'on a bien :

$$S_n(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{f(x_{+0})+f(x_{-0})}{2}.$$

   Indication : On utilisera le lemme de Riemann-Lebesgues.

IV. THÉORÈME DE FEJER

Pour une fonction f simplement continue on ne peut montrer la convergence de la série de Fourier vers f, l'obstacle principal est la non positivité du noyau de Dirichlet D_n. Nous allons montrer que par contre il y a convergence « en moyenne » de la série de Fourier vers $\tilde{f}$. La preuve ressemble à celle du théorème de Weierstrass vu dans le précédent TD.

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.

1. Théorème de Fejér

   On pose pour tout entier strictement positif n et tout réel x :

$$M_n(f) := \frac{1}{n}\Big(S_0(f)(x)+S_1(f)(x)+\ldots+S_{n-1}(f)(x)\Big).$$

   (a) Montrer qu'il existe pour tout entier strictement positif n et tout réel x une application 2π-périodique continue F_n telle que :

$$M_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,F_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,F_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

pour tout réel x.

Montrer de plus que pour tout entier strictement positif n et tout réel x non congru à 0 modulo 2π :

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\left(n\frac{x}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

F_n s'appelle le « noyau de Fejér », exhibons les propriétés essentielles de ce noyau.

(b) Montrer que :

i. pour tout entier strictement positif n, F_n est 2π-périodique.

ii. Pour tout entier strictement positif n et pour tout réel x, $F_n(x) \geq 0$.

iii. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

iv. Pour tout élément δ de $]0, \pi[$, la suite $(F_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$converge uniformément vers l'application nulle sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

(c) Soit x un élément de $\mathbf{R}$. On suppose que f est continue en x. Montrer pour tout entier $n \geq 1$, que :

$$M_n(f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(f(x-t) - f(x)\Big) F_n(t)\mathrm{d}t.$$

Soit un réel ε, strictement positif, montrer qu'il existe un réel δ, strictement positif, tel que pour tout $n_i n\mathbf{N}^*$,

$$\left|\int_{-\delta}^{+\delta} \Big(f(x-t) - f(x)\Big) F_n(t)\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En déduire, en utilisant le 2– b) point iv., que $M_n(f)(x)$ tend vers $f(x)$, lorsque n tend vers l'infini.

(d) **(Facultatif)** Soit x un élément de $\mathbf{R}$. On ne suppose plus que f est continue en x. Montrer que $M_n(f)(x)$ tend vers $\frac{1}{2}\Big(f(x_{+0}) + f(x_{-0})\Big)$ lorsque n tend vers l'infini.

2. (a) Dans cette question f est supposée continue sur un segment $[a, b]$. Montrer que la suite $(M_n(f))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

(b) En déduire que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\Big(\mathcal{C}_{2\pi}, \|.\|_\infty\Big)$. C'est le théorème de Weierstrass trigonométrique

3. On suppose que f est continue et que sa série de Fourier converge. Montrer que la somme de sa série de Fourier est f.

FIGURE 1 – JOSEPH FOURIER (1768–1830)
Né dans une famille nombreuse d'Auxerre, orphelin à dix ans, il entre néanmoins à la toute jeune Ecole Normale Supérieure, où il suit les enseignements de Monge, Laplace et de Lagrange. À la création de L'Ecole Polytechnique, il devient l'assistant de Lagrange auquel il ne tarde pas à succéder. Suit alors une carrière de haut fonctionnaire au service de l'Empire qui ne l'empèche pas cependant de poursuivre ses recherches ; il rédige notamment en 1807 un mémoire sur la propagation de la chaleur qui lui vaut d'être couronné par l'académie des Sciences et de passer à la postérité : il y expose en effet le moyen de décomposer une fonction en une somme de « sinus d'arcs multiples ». Les séries de Fourier étaient nées ...

V. DIVERGENCE DE LA SÉRIE FOURIER D'UNE APPLICATION CONTINUE (réservé candidats ENS)

Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, 2π-périodique, continue. La somme partielle d'ordre n de sa série de Fourier sera notée $S_n(f)$. On a vu dans la partie I, que pour tout élément n de $\mathbf{N}$ et tout réel x,

$$S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, \mathrm{d}t,$$

où D_n désigne l'application

$$D_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C},\ t \mapsto \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt)\right),$$

avec la convention qu'une somme vide est nulle.
D_n s'appelle le noyau de Dirichlet.
On a vu dans I que D_n est 2π-périodique, paire et que :

$$\int_0^{2\pi} D_n(x)\, \mathrm{d}x = 1.$$

1. Pour tout entier naturel n on considère la forme linéaire sur l'espace vectoriel des applications 2π-périodiques continues, $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$:

$$\Lambda_n\ :\ \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}) \to \mathbf{C}\,;\ f \mapsto S_n(f)(0).$$

   On muni $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$) et $\mathbf{C}$ du module. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, Λ_n est continue et :

$$|||\Lambda_n||| \leq \|D_n\|_1,$$

   $\|D_n\|_1$ vaut par définition $\int_0^{2\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $|||\Lambda_n||| = \|D_n\|_1$.

3. Montrer que $\|D_n\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4. En utilisant Le théorème de Banach Steinhauss (voir TD n° 4), Montrer qu'il existe un $\mathcal{G}\delta$ dense G_0 de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$, tel que pour tout élément f de G_0 la série de Fourier de f diverge en 0, ou plus précisément, tel que $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}(S_n(f(0)) = +\infty$.
5. Montrer que pour tout réel x, il existe un $\mathcal{G}\delta$ dense de G_x de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$, tel que pour tout élément f de G_x la série de Fourier de f diverge en x, ou plus précisément, tel que $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}(S_n(f(x)) = +\infty$.
6. Soit $(x_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $[0,2\pi]$ dense. Montrer qu'il existe un $\mathcal{G}\delta$ dense G de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ tel que pour tout f élément de G et tout élément p de $\mathbf{N}$, $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}(S_n(f(x_p)) = +\infty$.
7. En déduire que pour tout f élément de G, il existe un $\mathcal{G}\delta$ dense de $\mathbf{R}$, g_f, tel que la série de Fourier de f diverge en tout point de g_f.

Bref, les séries de Fourier des applications continues convergent très mal !

Indications pour la partie IV

c. Soit x un élément de $\mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, Par iii.,

$$M_n(f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(f(x-t) - f(x)\Big) F_n(t)\mathrm{d}t.$$

Soit un réel ε, strictement positif, par continuité de f en x, on dispose d'un réel δ, strictement positif, tel que pour tout $t \in [-\delta, \delta]$,

$$|f(x-t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, par positivité de F_n,

$$\left|\int_{-\delta}^{+\delta} \Big(f(x-t) - f(x)\Big) F_n(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\delta}^{+\delta} \Big|f(x-t) - f(x)\Big| F_n(t)\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{+\delta} F_n \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} F_n \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, par le début de la question, et toujours par positivité de F_n.

$$\begin{aligned}|M_n(f)(x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(|f(x-t) - f(x)|\Big) F_n(t)\mathrm{d}t \leq \int_{-\delta}^{+\delta} \Big(|f(x-t) - f(x)|\Big) F_n(t)\mathrm{d}t \\ . \int_{-\pi}^{-\delta} \Big(|f(x-t) - f(x)|\Big) F_n(t)\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{+\pi} \Big(|f(x-t) - f(x)|\Big) F_n(t)\mathrm{d}t \leq \\ \frac{\varepsilon}{2} + 2 \sup_{y \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]} |F_n(y)| \|f\|_\infty,\end{aligned}$$

en effet f, continue par morceaux, est bornée sur le segment $[-\pi, \pi]$ et, étant périodique, bornée ; donc pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$|f(x-t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty.$$

Mais le point iv., nous fournit $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \in [\![N, +\infty[\![$,

$$2 \sup_{y \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]} |F_n(y)| \|f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc :

$$\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ |M_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc $M_n(f)(x)$ tend vers $f(x)$, lorsque n tend vers l'infini.

1.

2.

2.(a) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$.

La continuité de f en a et b fournit un réel $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $t \in [-\delta_1, \delta_1]$, on ait :

$$|f(a-t) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,;\ |f(b-t) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

La continuité de f sur le segment $[a, b]$ assure son uniforme continuité. Choisissons un module δ d'uniforme continuité de $f_{|[a,b]}$ associé à ε inférieur à δ_1.

Soit alors, $x \in [a, b]$ et t tel que $|t| \leq \delta$. trois cas :

— on a $x - t \in [a, b]$, alors par uniforme continuité, $|f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon$;

— on a $x - t < a$, alors

$$a - \delta \leq x - \delta \leq x - t < a \leq x,$$

et donc $|x - a| \leq \delta$ et $|(x-t) - a| \leq \delta$ si bien que :

$$|f(x-t) - f(x)| \leq |(f(x-t) - f(a)| + |f(a) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

par (1) et continuité uniforme ;

— on a $x-t>b$, comme au point précédent, par (1) et continuité uniforme,

$$|f(x-t)-f(x)|\leq\varepsilon.$$

Ceci étant par le point iv., on dispose de $N\in\mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n\in[\![N,+\infty[\![$,

$$2\sup_{y\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]}|F_n(y)|\|f\|_\infty\leq\varepsilon.$$

Soit un entier $n\geq N$.

Pour tout $x\in[a,b]$,

$$\begin{aligned}|M_n(f)(x)-f(x)|\leq&\int_{-\pi}^{+\pi}\Big(|f(x-t)-f(x)|\Big)F_n(t)\mathrm{d}t\leq\int_{-\delta}^{+\delta}\Big(|f(x-t)-f(x)|\Big)F_n(t)\mathrm{d}t\\&.\int_{-\pi}^{-\delta}\Big(|f(x-t)-f(x)|\Big)F_n(t)\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{+\pi}\Big(|f(x-t)-f(x)|\Big)F_n(t)\mathrm{d}t\leq\\&\int_{-\delta}^{\delta}\varepsilon F_n+2\sup_{y\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]}|F_n(y)|\|f\|_\infty\leq\\&\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}F_n+\varepsilon\leq\\&\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

toujours grâce à la positivité de F_n.

Comme ε est arbitraire, la suite $(M_n(f))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Indications pour la partie V.

1. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on considère la forme linéaire

$$\Lambda_n\ :\ \mathcal{C}_{2\pi}\to\mathbf{C}\,;\ f\mapsto S_n(f)(0).$$

Soit $n\in\mathbf{N}$. Pour tout $f\in\mathcal{C}_{2\pi}$, par parité de D_n,

$$|\Lambda_n(f)|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}D_n(-t)f(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^{2\pi}|D_n(t)|\,|f(t)|\mathrm{d}t\leq\|D_n\|_1\|f\|_\infty,\tag{3}$$

donc Λ_n est continue sur $(\mathcal{C}_{2\pi},\|\cdot\|_\infty)$ et :

$$\|\Lambda_n\|_{\mathcal{L}_c}\leq\|D_n\|_1.$$

2. *Pour avoir égalité dans (3) il faudrait prendre f réelle de même signe que D_n ou de signe opposé et avoir $|f|=\|f\|_\infty$, donc prendre pour f le signe de D_n, à une constante multiplicative près. Hélas une telle application ne serait pas continue (le noyau de Dirichlet est de signe variable), la norme de Λ_n n'est donc pas atteinte sur la boule unité de $\mathcal{C}_{2\pi}$. Par contre on peut montrer qu'elle vaut $\|D_n\|_1$, en montrant que Λ_n prend, sur la boule unité des valeurs arbitrairement proches de $\|D_n\|_1$. Pour ce faire on pourrait approcher la fonction signe de D_n par des fonctions continues affines par morceaux, mais la chose serait mal aisée et de rédaction difficile. Aussi allons-nous plutôt utiliser la remarque simple suivante :* $\mathrm{sgn}(D_n)(x)=\frac{D_n(x)}{|D_n(x)|}$, *pour tout réel x pour lequel $D_n(x)\neq0$.*

Soit $\varepsilon\in\mathbf{R}_+^*$. Posons $f_\varepsilon=\frac{D_n}{|D_n|+\varepsilon}$, f_ε est trivialement un élément de la boule unité de $\mathcal{C}_{2\pi}$ et :

$$\Lambda_n(f_\varepsilon)=\int_0^{2\pi}\frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)|+\varepsilon}\mathrm{d}t\geq\int_0^{2\pi}\frac{D_n(t)^2-\varepsilon^2}{|D_n(t)|+\varepsilon}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(|D_n(t)|-\varepsilon)\mathrm{d}t.$$

et finalement :

$$\Lambda_n(f_\varepsilon) \geq \int_0^{2\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t - 2\pi\varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, $|||\Lambda_n||| \geq \|D_n\|_1$ et au final :

$$|||\Lambda_n||| = \|D_n\|_1.$$

3. – Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$|||\Lambda_n||| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}\,\mathrm{d}t.$$

Par concavité de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis changement de variable « $u = \frac{2n+1}{2}t$ »,

$$|||\Lambda_n||| \geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|}{\left|\frac{t}{2}\right|}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,\mathrm{d}u.$$

La divergence déjà vue, de $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(u)|}{u}\mathrm{d}u$ assure que $(\Lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'est pas bornée et on est dans le second cas.

4. D'après **le théorème de Banach-Steinhauss** appliqué à la famille $(\Lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de forme linéaires continues :
   — Soit il existe $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout entier $n \geq 1$,

   $$|||\Lambda_n||| \leq M,$$

   ou, si l'on préfère, la famille $(\Lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bornée ;
   — Soit il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense D du Banach $(\mathcal{C}_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ tel que pour tout $x \in D$,

   $$\sup_{n\in\mathbf{N}} |\Lambda_n(f)| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |S_n(f)(0)| = +\infty.$$

   La question précédente montre que nous ne sommes pas dans le premier cas.
   D'où le résultat.
5. Soit $x \in \mathbf{R}$, en appliquant le résultat précédent à $f(x + \cdot)$ la question tombe.
6. Soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite dense de $[-\pi, \pi[$. par la question précédente on dispose pour tout $k \in \mathbf{N}$ d'un $\mathcal{G}_\delta$ dense D_k de $\mathcal{C}_{2\pi}$ tel que pour tout $f \in D_k$, $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |S_n(f)(x_k)| = +\infty$.
   Posons $G = \bigcap\limits_{k\in\mathbf{N}} D_k$. Notons que G est un $\mathcal{G}_G$ dense, en effet chaque D_k est une intersections dénombrable d'ouverts, nécessairement denses puisque D_k l'est, donc G est une intersection dénombrable d'ouverts denses et le **théorème de Baire** fait le reste. De plus pour tout élément f de G et tout $k \in \mathbf{N}$,

   $$\sup_{n\in\mathbf{N}} |S_n(f)(x_k)| = +\infty.$$
7. Soit f un élément de G. On a l'égalité

   $$\left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbf{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\right\} = \bigcap_{p\in\mathbf{N}} \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbf{N}} |S_n(f)(x)| > p\right\}$$
   $$= \bigcap_{p\in\mathbf{N}} \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{x \in \mathbf{R} \,\big|\, |S_n(f)(x)| > p\}\right)$$

   Mais pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $\{x \in \mathbf{R} \,\big|\, |S_n(f)(x)| > p\}$ est un ouvert, par continuité de $S_n(f)$, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} \{x \in \mathbf{R} |\, |S_n(f)(x)| > p\}$ est pour tout entier $p \geq 0$, un ouvert, et donc $\left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |S_n(f)(x)| = +\infty\right\}$ est un $\mathcal{G}_G$, qui est dense dans $[-\pi, \pi[$, car il contient $\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ et dense dans $\mathbf{R}$ par 2π périodicité des $S_n(f)$.