DS n°4

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités (jusqu'à 15% de la note) pour

- manque de soin ou de lisibilité ;
- formules mathématiques non ponctuées ;
- recours à des abréviations autres que ssi (tt, qqs, fct., ens...), ou symbloles logiques mélangés à du texte.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Notations

On rappelle l'expression des coefficients binomiaux. Lorsque k et n sont deux entiers, on pose :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

On pourra utiliser sans démonstration l'équivalent de Stirling, valable lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$:

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2\pi n}$$

1 Une propriété sur les sommes de Riemann

Dans toute la suite, pour tous réels $a < b$, on note $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle $]a,b[$, intégrables sur $]a,b[$ et vérifiant de plus :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

1 ▷ Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $]a,b[$ appartient à l'ensemble $\mathcal{D}_{a,b}$.

2 ▷ En posant pour tout entier $k \geqslant 1, a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k+1}}$ et $b_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+1}}$, montrer que l'on peut choisir un entier

$k_0 \geqslant 1$ tel que:

$$\forall k \geqslant k_0, b_{k+1} < a_k.$$

En déduire que la fonction $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} k^2.2^{k+1}.(t - a_k), \text{ si il existe un entier } k \geqslant k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k, a_k + \frac{1}{2^{k+1}}\right] \\ k^2.2^{k+1}.(b_k - t), \text{ si il existe un entier } k \geqslant k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k + \frac{1}{2^{k+1}}, b_k\right] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

est une fonction bien définie et continue sur $]0,1[$, intégrable sur $]0,1[$ et que cette fonction f n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{D}_{0,1}$.

Dans la suite, on définit la fonction: $h : \begin{cases}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \end{cases}.$

3 ▷ Montrer que la fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1[$, puis

montrer que la fonction φ appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$.

4 ▷ On note $\tilde{h}$ la restriction de la fonction h à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$. Vérifier que la fonction $\tilde{h}$ est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, puis montrer que la fonction $\tilde{h}$ appartient à $\mathcal{D}_{0,\frac{1}{2}}$.

5 ▷ Montrer que la fonction h est intégrable sur $]0,1[$ et que :

$$\int_0^1 h(t)dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{h}(t)dt.$$

6 ▷ Prouver alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \int_0^1 h(t)dt.$$

7 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)dt.$$

En déduire que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^1 h(t)dt.$$

8 ▷ Déduire des questions précédentes que la fonction h appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$.

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 h(t)dt = \pi$$

10 ▷ Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a un équivalent de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}$$

où la constante λ est à préciser.

11 $\triangleright$ En déduire la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}$$

On considère une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement supérieurs à -1 convergente de limite nulle.

12 $\triangleright$ Montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}}=0.$$

13 $\triangleright$ En déduire que: :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}.\left(\frac{(1+\varepsilon_i)\,(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n}-1\right)=0.$$

2 Une étude de marche aléatoire

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n:\Omega\longrightarrow\{-1,1\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et à valeurs dans l'ensemble à deux éléments $\{-1,1\}$, ces variables aléatoires étant mutuellement indépendantes et centrées.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k.$$

14 $\triangleright$ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\dfrac{1+X_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Dans la suite, on fixe l'entier $n\geqslant 1$. On appelle chemin, tout $2n$-uplet $\gamma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2n})$ dont les composantes ε_k valent -1 ou 1 .

Si $\gamma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{2n})$ est un chemin, on appelle indice d'égalité, tout entier $b\in[\![1,2n]\!]$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{k}\varepsilon_i=0$.

On remarquera alors qu'un entier k est un indice d'égalité si et seulement si le $k-$uplet $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)$ comporte autant de composantes égales à 1 que de composantes égales is -1 .

On note $N_n:\Omega\longrightarrow\mathbb{N}$ la variable aléatoire qui à tout élément ω de l'univers Ω compte le nombre d'indices d'égalité du chemin $(X_1(\omega),\cdots,X_{2n}(\omega))$.

On note pour tout entier i entre 1 et n, l'événement A_i défini par

$$A_i=\{\omega,\ 2i\text{ est un indice d'égalité de }\ (X_1(\omega),\cdots,X_{2n}(\omega))\}$$

15 $\triangleright$ Calculer la probabilité $\mathbb{P}(A_i)$, pour tout entier i entre 1 et n.

16 $\triangleright$ Soit $\ell\in\mathbb{Z}$ un entier et $n\geqslant 1$ un autre entier. En distinguant le cas où l'entier $\ell-n$ est pair ou impair, calculer $\mathbb{P}(S_n=\ell)$.

17 ▷ Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels strictement positifs telles que : $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n$ et la série $\sum_n c_n$ diverge.

En utilisant le résultat admis dans l'énoncé, montrer que la série $\sum_n d_n$ est divergente et que :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

18 ▷ Montrer que la variable aléatoire N_n admet une espérance finie et que son espérance $\mathbb{E}(N_n)$ est égale à :

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\binom{2i}{i}}{4^i}$$

Indication : on pourra exprimer la variable N_n à l'aide de fonctions indicatrices associées aux événements A_i.

19 ▷ En déduire l'équivalent :

$$\mathbb{E}(N_n)_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$$

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on procède à des tirages de boules sans remise, jusqu'à vider complètement l'urne. Les tirages sont équiprobables à chaque pioche.

Pour tout entier k entre 1 et $2n$, on dit que l'entier k est un indice d'égalité si dans l'expérience de pioche précédemment décrite, il reste autant de boules noires que de boules blanches dans l'urne après avoir pioché les k premières boules sans remise. On remarque que l'entier $2n$ est toujours un indice d'égalité.

On note M_n, la variable aléatoire comptant le nombre aléatoire d'indices d'égalité k entre 1 et $2n$.

20 ▷ En utilisant par exemple les événements B_i : «*l'entier i est un indice d'égalité* » , montrer que la variable M_n admet une espérance finie égale à :

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\binom{2i}{i}\cdot\binom{2n-2i}{n-i}}{\binom{2n}{n}}.$$

21 ▷ En déduire l'équivalent :

$$\mathbb{E}(M_n)_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}$$

FIN DU PROBLÈME