DS n°5

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités (jusqu'à 15% de la note) pour

- manque de soin ou de lisibilité ;
- formules mathématiques non ponctuées ;
- recours à des abréviations autres que ssi (tt, qqs, fct., ens...), ou symbloles logiques mélangés à du texte.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Objectifs

Ce problème étudie la dérivation des sommes de séries de fonctions $\sum f_n$ de deux façons différentes : un point de vue déterministe et un point de vue probabiliste. Pour conclure à une formule du type $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(\mathrm{K})} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(\mathrm{K})}$ avec K entier supérieur ou égal à 2 , les théorèmes usuels contiennent généralement au moins une hypothèse sur les dérivées intermédiaires $f_n', \ldots, f_n^{(\mathrm{K}-1)}$. Ainsi a-t-on dans le pogramme le théorme suivant.

Théorème. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications d'un segment J (non trivial) à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et K un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que :*

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$;*
- *pour $i = 0, 1, ..., \mathrm{K}-1$ la série $\sum f_n^{(i)}$ converge simplement ;*
- *la série $\sum f_n^{(\mathrm{K})}$ converge uniformément.*

Alors la somme F de la série $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ et pour $i = 0, 1, ..., \mathrm{K}-1, \mathrm{K}$

$$\mathrm{F}^{(\mathrm{K})} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(\mathrm{K})}.$$

On pourra utiliser ce théorème dans le sujet.

Le sujet montre que l'on peut affaiblir l'hypothèse de contrôle des dérivées intermédiaires par une hypothèse de convergence de séries numériques de la forme $\sum f_n(x)$ où x parcourt un ensemble fini. Cette dernière hypothèse sera de nouveau affaiblie dans la partie probabiliste consacrée à la dérivation de séries aléatoires de fonctions.

Le sujet est divisé en cinq parties :

- la partie 0 est un exemple d'application du théorème du préambule ;
- la partie I étudie une inégalité, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées intermédiaires d'une fonction de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$;
- la partie II utilise la partie I pour démontrer un résultat de transfert du caractère $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ à une somme de série de fonctions ;

— la partie III, qui est indépendante des parties I et II, étudie la convergence des séries aléatoires numériques de la forme $\sum \mathrm{X}_n a_n$, où (X_n) est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de Rademacher et (a_n) une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ;

— la partie IV utilise les résultats des parties précédentes pour donner une application au caractère $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ de la somme d'une série aléatoire de fonctions de la forme $\sum \mathrm{X}_n f_n$.

Notations

— Pour tous entiers i et j vérifiant $i \leqslant j$, la notation $[\![i, j]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $[i, j] \cap \mathbb{N}$.

— La lettre K désigne systématiquement un entier naturel non nul.

— Le symbole $\mathbb{R}_{\mathrm{K}-1}[\mathrm{X}]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $\mathrm{K}-1$ à coefficients réels.

— Pour tout intervalle I, on note $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}(\mathrm{I})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{K}}(\mathrm{I})$ et $k \in [\![0, \mathrm{K}]\!]$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$).

— Dans le cas particulier $\mathrm{I} = [0, 1]$, pour toute fonction bornée $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

I Un exemple

Pour tout entier naturel n non nul on considère l'application

$$u_n \ :]1, +\infty[\to \mathbb{R}\,; x \mapsto \frac{1}{n^x}.$$

Q 0. Montrer que la séries $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ d'applications converge simplement et, en notant F sa somme, montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On utilisera le théorème du préambule.

I Inégalités d'interpolation des dérivées

Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_{\mathrm{K}}$ de l'intervalle $[0, 1]$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ (dépendant des réels $x_1, \ldots, x_{\mathrm{K}}$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^{\mathrm{K}}([0, 1]), \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant \mathrm{K}-1} \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(\mathrm{K})} \right\|_\infty + \mathrm{C} \sum_{\ell=1}^{\mathrm{K}} |f(x_\ell)| \qquad (\mathrm{I}.1)$$

Une inégalité du type précédent est appelée *inégalité d'interpolation* à l'ordre K.

I.A - Cas particulier $\mathrm{K} = 1$

On fixe $x_1 \in [0, 1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0, 1]), \quad \|f\|_\infty \leqslant \left\| f' \right\|_\infty + \mathrm{C} \, |f(x_1)| \qquad (\mathrm{I}.2)$$

Q 1. Montrer l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $\mathrm{C} = 1$.

Q 2. Soit $\mathrm{C} \in]0, 1[$. À l'aide d'un exemple simple de fonction f, montrer que l'inégalité d'interpolation (I.2) est fausse.

I.B - Cas particulier $\mathrm{K}=2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0,1]$. On veut construire une constante $\mathrm{C}>0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \quad \max\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right) \leqslant \|f''\|_\infty + \mathrm{C}\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right) \tag{I.3}$$

Q 3. Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité

$$\left|f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leqslant \|f''\|_\infty$$

Q 4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a $\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$.

Q 5. Conclure le cas $\mathrm{K}=2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (I.3) avec $\mathrm{C} = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

I.C - Cas général par interpolation de Lagrange

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K, donnée par (I.1). On fixe $\mathrm{K} \in \mathbb{N}^\star$.

Q 6. Démontrer que l'application

$$\Psi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\mathrm{K}-1}[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R}^{\mathrm{K}} \\ \mathrm{P} & \mapsto & (\mathrm{P}(x_1), \ldots, \mathrm{P}(x_{\mathrm{K}})) \end{array}\right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Q 7. Montrer qu'il existe K polynômes $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_{\mathrm{K}}$ de $\mathbb{R}_{\mathrm{K}-1}[\mathrm{X}]$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{K}}([0,1])$, le polynôme $\mathrm{P} = \sum\limits_{j=1}^{\mathrm{K}} f(x_j)\,\mathrm{L}_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1, \mathrm{K}]\!], \quad \mathrm{P}(x_\ell) = f(x_\ell)$$

Dans les deux questions suivantes Q8 et Q9, on fixe $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{K}}([0,1])$ et on note P le polynôme déterminé dans la question Q7.

Q 8. Pour tout $k \in [\![0, \mathrm{K}-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $\mathrm{K}-k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - \mathrm{P}^{(k)}$ s'annule.

Q 9. En déduire l'inégalité $\left\|f^{(k)} - \mathrm{P}^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - \mathrm{P}^{(k+1)}\right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, \mathrm{K}-1]\!]$.

Q 10. Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C}>0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée.

II Dérivation $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ pour les séries de fonctions

II.A - Énoncé général

On se propose maintenant de démontrer le résultat annoncé dans le préambule. Soit $\mathrm{K} \in \mathbb{N}^\star$, on considère

- des réels distincts $x_1 < \cdots < x_{\mathrm{K}}$ d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a<b$) ;
- une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

  (H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(\mathrm{K})}$ converge normalement sur $[a,b]$;

  (H2) pour tout $\ell \in [\![1, \mathrm{K}]\!]$ la série numérique $\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Q 11. Dans le cas particulier $[a,b] = [0,1]$, justifier que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$ pour tout $k \in [\![0, \mathrm{K}-1]\!]$.

Q 12. Traiter la question précédente dans le cas général d'un segment $[a, b]$ avec $a < b$.

On pourra examiner $f_n \circ \sigma$ où $\sigma : [0,1] \to [a,b]$ est définie par $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ pour tout $t \in [0,1]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $\mathrm{F}_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Q 13. Démontrer que F_0 est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ sur $[a,b]$ et que $\mathrm{F}_0^{(k)} = \mathrm{F}_k$ pour tout $k \in [\![1, \mathrm{K}]\!]$.

II.B - Application sur un exemple

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

Q 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier qu'il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(\,]0, +\infty[\,)$ vérifiant

$$f_n(1) = 0,\ f_n(2) = 0 \text{ et } f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2} \text{ pour tout } x > 0$$

Q 15. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Q 16. Expliciter $\mathrm{F}''(x)$.

Q 16. Montrer que $|\mathrm{F}(x)| \leqslant \frac{1}{3}$ pour tout $x \in [1, 2]$.

III Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

Le but de cette partie est de montrer que, si la série $\sum a_n^2$ converge, alors la série aléatoire $\sum \mathrm{X}_n a_n$ converge avec probabilité 1.

Notations

— $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = -1) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 1) = \frac{1}{2}\,;$$

— $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ;

— pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_n a_n$ la somme partielle au rang N de la série $\sum \mathrm{X}_n a_n$;

— si $(\phi(j))_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ et tout entier $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, on note les évènements

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_j &= \left\{\left|\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\},\\
\mathrm{B}_j &= \left\{\max_{\phi(j)+1 \leqslant n \leqslant \phi(j+1)} \left|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\},\\
\mathrm{B}_{j,m} &= \left\{\left|\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j} \text{ et } \forall n \in [\![\phi(j), m-1]\!], \quad \left|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\}.
\end{aligned}$$

La réalisation de l'évènement $\mathrm{B}_{j,m}$ signifie que m est le plus petit entier de l'intervalle $[\![\phi(j), \phi(j+1)]\!]$ vérifiant $\left|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}$.

III.A - Construction de la suite $(\phi(j))_{j\in\mathbb{N}}$ *et majoration de* $\mathbb{P}(\mathrm{A}_j)$

Q 18. Justifier l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers naturels $(\phi(j))_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n>\phi(j)}^{+\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^j}$$

On fixe désormais une telle suite $(\phi(j))_{j\in\mathbb{N}}$.

Q 19. Exprimer l'espérance et la variance de $\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}$ en fonction des termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 20. Déduire des deux questions précédentes la majoration $\mathbb{P}(\mathrm{A}_j) \leqslant 2^{-j}$.

III.B - Inégalité maximale de Lévy $\mathbb{P}(\mathrm{B}_j) \leqslant 2\mathbb{P}(\mathrm{A}_j)$

Q 21. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, démontrer que les évènements $\mathrm{B}_{j,m}$, pour m parcourant $[\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, sont disjoints deux à deux et qu'on a l'égalité d'évènements

$$\mathrm{B}_j = \bigcup_{\phi(j)<m\leqslant\phi(j+1)} \mathrm{B}_{j,m}$$

Q 22. Expliquer comment en déduire la formule $\mathbb{P}(\mathrm{A}_j) = \sum\limits_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}(\mathrm{A}_j \cap \mathrm{B}_{j,m})$.

Q 23. Soit $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, montrer que la fonction

$$\left|\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & 2^{\phi(j+1)-\phi(j)}\mathbb{P}\left(\left\{\left|\alpha\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha\mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap \mathrm{B}_{j,m}\right) \end{array}\right.$$

est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et est paire.

Q 24. Prouver que si l'évènement B_j se réalise, alors il existe $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$ et $\alpha \in \{-1, +1\}$ tels que l'évènement

$$\left\{\left|\alpha\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha\mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap \mathrm{B}_{j,m}$$

se réalise également.

On pourra exprimer $\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}$ en fonction des deux nombres $\alpha\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha\mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}$ avec $\alpha = \pm 1$.

Q 25. En déduire que

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}_j) \leqslant 2\mathbb{P}(\mathrm{A}_j)$$

III.C - Convergence de la série aléatoire $\sum \mathrm{X}_n a_n$

Q 26. On note B l'évènement $\bigcap\limits_{\mathrm{J}\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{j\geqslant\mathrm{J}} \mathrm{B}_j$. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = 0$.

Q 27. Montrer que l'évènement

$$\left\{\exists \mathrm{J} \in \mathbb{N}, \quad \forall j \geqslant \mathrm{J}, \quad \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!], \quad \left|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\}$$

se réalise avec probabilité 1.

Q 28. En déduire que l'évènement

$$\left\{ \text{ la suite } \left(\mathrm{S}_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est convergente } \right\}$$

a également une probabilité 1.

On pourra examiner la série $\sum \left|\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right|$.

Q 29. Conclure que l'évènement

$$\left\{ \text{ la série } \sum \mathrm{X}_n a_n \text{ est convergente } \right\}$$

a une probabilité 1.

IV Dérivation $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ pour des séries aléatoires de fonctions

On fixe $\mathrm{K} \in \mathbb{N}^\star$ et on considère

- une suite de variables aléatoires $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses de la partie précédente ;
- des réels distincts $x_1 < \cdots < x_{\mathrm{K}}$ de $[0,1]$;
- une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses
  (H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(\mathrm{K})}$ converge normalement sur $[0,1]$;
  (H2') pour tout $\ell \in [\![1,\mathrm{K}]\!]$, la série numérique $\sum f_n(x_\ell)^2$ est convergente.

Q 30. Montrer que l'une des deux hypothèses (H2') ou (H2) (étudiée dans la partie II) implique l'autre.

Q 31. Montrer que l'évènement :

$$\text{pour tout } \ell \in [\![1,\mathrm{K}]\!], \text{ la série } \sum \mathrm{X}_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente .}$$

a une probabilité 1.

Q 32. On note $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_{\mathrm{K}-1}[\mathrm{X}]$ un polynôme vérifiant $\mathrm{P}_n(x_\ell) = f_n(x_\ell)$ pour tout $\ell \in [\![1,\mathrm{K}]\!]$ (cf. question 7), montrer que l'évènement :

$$\begin{cases} - \text{ pour tout } k \in [\![0,\mathrm{K}]\!], \text{ la série de fonctions } \sum \mathrm{X}_n (f_n - \mathrm{P}_n)^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0,1], \\ - \text{ la fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n (f_n - \mathrm{P}_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^{\mathrm{K}}, \\ - \text{ pour tout } k \in [\![0,\mathrm{K}]\!], \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n (f_n - \mathrm{P}_n)\right)^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n (f_n - \mathrm{P}_n)^{(k)} \end{cases}$$

a une probabilité 1.

Q 33. Montrer que l'évènement :

$$\begin{cases} - \text{ pour tout } k \in [\![0,\mathrm{K}]\!], \text{ la série de fonctions } \sum \mathrm{X}_n f_n^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0,1], \\ - \text{ la fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^{\mathrm{K}}, \\ - \text{ pour tout } k \in [\![0,\mathrm{K}]\!], \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n f_n\right)^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n f_n^{(k)} \end{cases}$$

a une probabilité 1.

Q 34. Donner un exemple d'entier $\mathrm{K} \in \mathbb{N}^\star$ pour lequel l'évènement précédent se réalise avec les fonctions f_n définies par

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_n(x) = \ln\left(1 + \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

⋆ ⋆
⋆