ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2002

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

La première partie est indépendante des trois autres.

⋆⋆⋆

Première partie

1. On considère une suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels telle que $\sum_{n=0}^{\infty} w_n a_n^2 < +\infty$.

Vérifier que la fonction $x \mapsto D_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (a_n - x)^2$ est bien définie sur $\mathbf{R}$ et atteint son minimum. On déterminera ce minimum ainsi que l'ensemble des points où il est atteint.

2. On considère une fonction continue réelle de carré intégrable f sur l'intervalle $]0,1[$. Vérifier que la fonction $x \mapsto D_f(x) = \int_0^1 \big(f(t) - x\big)^2 \mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbf{R}$ et atteint son minimum. On déterminera ce minimum ainsi que l'ensemble des points où il est atteint.

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne une fonction réelle f sur l'intervalle $I =]0,1[$, continue par morceaux et intégrable.

3. Vérifier que la fonction $x \mapsto \Delta(x) = \int_0^1 |f(t) - x| \mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

4.a) Montrer que la fonction Δ est continue et convexe.

b) Déterminer les limites de $\Delta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

5. Montrer que Δ admet un minimum, que l'on notera V, et que l'ensemble M des points où Δ atteint ce minimum est un intervalle.

6. *Exemples.* Déterminer Δ, V et M dans les deux cas suivants :

a) $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \leqslant 1/2 \\ 0 \text{ si } t > 1/2 \end{cases}$.

b) $f(t) = t$.

Troisième partie

On se donne à nouveau une fonction f ayant les propriétés indiquées dans la **deuxième partie** ; on suppose en outre que f est monotone par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe des nombres

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

tels que f soit monotone sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. Pour tout intervalle J de $\mathbf{R}$, éventuellement réduit à un point, on définit une fonction χ_J sur I par

$$\chi_J(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } f(t) \in J \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

7. Vérifier que la fonction χ_J est continue par morceaux et intégrable sur I. On note $\lambda(J)$ son intégrale.

8. Établir les propriétés suivantes de l'application λ :

a) Étant donnés des intervalles $J_1, \ldots, J_n$ deux à deux disjoints dont la réunion est encore un intervalle, on a

$$\lambda(J_1 \cup \ldots \cup J_n) = \lambda(J_1) + \ldots + \lambda(J_n) \ ;$$

b) Étant donnée une suite croissante d'intervalles $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$\lambda\Big(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} J_n\Big) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \lambda(J_n) \ .$$

c) Étant donnée une suite décroissante d'intervalles $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$\lambda\Big(\bigcap_{n \in \mathbf{N}} J_n\Big) = \inf_{n \in \mathbf{N}} \lambda(J_n) \ .$$

9. Soit x un réel et ε un réel > 0 ; on pose

$$J_1 =]-\infty, x] \ , \ J_2 =]x, x+\varepsilon[\ , \ J_3 = [x+\varepsilon, +\infty[\ .$$

a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon}\big(\Delta(x+\varepsilon)-\Delta(x)\big)-\lambda(J_1)+\lambda(J_3)=\lambda(J_2)+\frac{2}{\varepsilon}\int_0^1 \chi_{J_2}(t)\big(x-f(t)\big)\mathrm{d}t\ ,$$

où Δ est la fonction définie à la question **3.**

b) Montrer que Δ admet en tout point x une dérivée à droite que l'on déterminera.

c) Même question pour la dérivée à gauche.

d) Comparer ces deux dérivées et dire pour quelles valeurs de x elles sont égales.

10. On pose

$$\phi(x)=\lambda(]-\infty,x]) \tag{1}$$

$$\phi(x+0)=\lim_{n\to+\infty}\phi\left(x+\frac{1}{n}\right) \qquad \phi(x-0)=\lim_{n\to+\infty}\phi\left(x-\frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

a) Exprimer $\phi(x+0)$ et $\phi(x-0)$ en fonction de $\phi(x)$ et de $\lambda(\{x\})$.

b) Montrer que l'ensemble N des réels x vérifiant $\phi(x-0)\leqslant 1/2\leqslant\phi(x)$, s'il n'est pas vide, est un intervalle fermé borné.

c) Comparer les ensembles M (défini à la question **5.**) et N et préciser le comportement de ϕ sur l'intérieur de N lorsque N n'est pas réduit à un point.

Quatrième partie

11. On se donne une fonction f sur I, réelle, continue, intégrable et monotone par morceaux ; on note M_f et V_f ce qui était noté M et V.

a) Démontrer l'inclusion $M_f\subset f(I)$.

b) Montrer que M_f est réduit à un point, que l'on notera m_f.

c) Comparer V_f et $\displaystyle\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t$, puis m_f et $2\displaystyle\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t$.

12. On considère une suite (g_n) de fonctions sur I, réelles, continues, intégrables et monotones par morceaux ; on suppose que cette suite converge en moyenne vers une fonction g continue par morceaux, intégrable et monotone par morceaux. On pose $m_n=m_{g_n}$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (m_n) est non vide et inclus dans l'ensemble M_g des points où la fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^1|g(t)-x|\mathrm{d}t$ atteint son minimum.

* *
*