DM n°8

PROBLÈME 1 : PROCESSUS DE GALTON-WATSON

Introduction

FRANCIS GALTON *un proche parent de* CHARLES DARWIN, *s'interroge à la fin du 19*e *siècle sur l'extinction des patronymes. Après des travaux en météorologie, (on lui doit le mot d'anticyclone), il se consacre à la génétique et sa formation ne lui permetait pas de résoudre lui-même ce problème. Il fait donc appel à un ami mathématicien* WILLIAM WATSON. *Tous les deux publient un article en 1874 qui, suite à une regrétable erreur conclut de façon fautive à l'inévitable disparition des patronymes [Bacaër, 2008].*

Nous proposons ici une étude moderne et plus général du problème qui — on l'espère — est exempte d'erreurs.

On se donne une famille $(Y_{n,i})_{(n,i)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi. On note pour simplifier $Y := Y_{0,1}$, $m := \mathrm{E}(Y)$ et pour tout entier $k \geq 0$, $p_k := \mathbf{P}(Y = k)$. On suppose que p_0 n'est ni nul, ni égal à 1 :

$$0 < p_0 < 1.$$

Pour tout entier naturel n, et tout entier $i \geq 1$, si à la n^{e} génération il y a au moins i membres masculins de la famille que l'on se propose d'étudier, alors $Y_{n,i}$ représente dans le modèle historique, le nombre de déscendants mâles probable du i^{e} membre.

On considère sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, la varable aléatoire Z_0 qui vaut presque sûrement 1 et la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i},$$

ce en convenant comme d'ordinaire qu'une somme vide vaut 0.

1. FONCTION GÉNÉRATRICE DE Z_n On note g la fonction génératrice de Y et pour tout $n \in \mathbf{N}$, G_n la fonction génératrice de Z_n.
   (a) Que modélise pour un entier naturel n la variable aléatoire Z_n ?
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$G_{n+1} = G_n \circ g,$$
   en déduire l'expression de G_n en fonction de g.
2. ÉTUDE DE g
   (a) Montrer que g est strictement croissante sur $[0, 1]$.
   (b) On suppose que $p_0 + p_1 \neq 1$. Montrer que g est strictement convexe.
   (c) On suppose que $p_0 + p_1 = 1$. Que dire de g ?
3. EXTINCTION DES PATRONYMES
   On note A l'événement *la suite* (Z_n) *s'annule*, qui caractérise l'extinction du patronyme,
   $$A = \{\exists n \in \mathbf{N} | Z_n = 0\}.$$
   (a) Montrer que $G_n(0) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbf{P}(A)$. En déduire que $\mathbf{P}(A)$ est un point fixe de g.
   Pour la suite on introduit l'application $\phi\ :\ [0, 1] \to \mathbf{R}\,;\ s \mapsto g(s) - s$.
   (b) On suppose $m < 1$. En étudiant les variations de ϕ, montrer que $\mathbf{P}(A) = 1$.
   Conclusion : *le patronyme s'éteint presque sûrement.*
   (c) On supose à présent que $m > 1$. Montrer que la restriction de g à $]0, 1[$ admet un et un seul point fixe v. Montrer que $G_n(0) \underset{n\to+\infty}{\to} v$.

(d) On suppose que $m=1$. Montrer que g est strictement convexe. On suppose que la restriction de g à $]0,1[$ admet un point fixe v. Montrer que g coïncide avec l'identité sur $[v,1]$. En déduire que $\mathbf{P}(A)=1$.

PROBLÈME 2 : EXPONENTIELLE DE MATRICE

Exponentielle de matrice —
On admet les résultats de TD sur la décomposition de Dundford.
On rappelle le résultat au programme : *Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent entre eux, alors* $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$.

On désigne par n un entier ≥ 1 et par M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. déterminer $\operatorname{Det}(\exp(M))$.
2. Montrer que si M est diagonalisable, alors $\exp(M)$ l'est.
3. **Facultatif.**
   (a) Donner la décomposition de Dundford de $\exp(M)$.
   (b) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\exp(M)$ l'est.
4. Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(M)=P(M)$. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P_0 tel que pour tout élément $A\in\mathcal{M}_n\mathbf{C}$, $\exp(A)=P_0(A)$
5. (a) Soit N une matrice élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe élément de A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\exp(A)=I+N$.
   (b) Déduire de (a) que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}))=\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On pourra utiliser la décomposition par blocs d'une matrice.
   (c) Soient $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ à valeur et $p\in\mathbf{N}$. On suppose A diagonalisable. Montrer qu'il existe $B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $B^p=A$. On ne suppose plus A diagonalisable, montrer que le résultat précédent demeure.
   On peut s'inspirer de (a) et (b)
6. L'exponentielle de matrice est-elle injective de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$?
7. Montrer que la restriction de l'exponentielle de matrice au sous-espace vectoriel des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisables est injectif.
8. Montrer que l'exponentielle de matrice définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^+$ mais est non surjectif de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.
9. Étude de $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ **Facultatif.**
   (a) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que A est diagonalisable. Montrer qu'il existe $p\in\mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(p(A))=A$.
   (b) En utilisant la décomposition de Dundford, montrer qu'il existe $p\in\mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(p(M))=M$, avec toujours $M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Retrouver le résultat de la question 7.
   (c) Déduire de ce qui précède que :
   $$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))=\left\{A\in\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}),\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R}),A=B^2\right\}.$$
   (d) Montrer que le groupe G engendré par $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.

Références

[Bacaër, 2008] Bacaër, N. (2008). *Histoires de mathématiques et de populations.* Cassini Paris.

Indication pour le DM n°8

Problème 1

1. Fonction génératrice de Z_n

   (a) Soit un entier naturel n. La variable aléatoire Z_n modélise le nombre de descendants mâles à la n^{e} génération.

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $s \in [-1, 1]$, puisque $(\{Z_n = q\})_{q \in \mathbf{N}}$ est une famille complète d'événements,

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_{n+1} = 0)s^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_{n+1} = k, Z_n = q)s^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_{n,1} + ... + Y_{n,q} = k, Z_n = q)s^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_{n,1} + ... + Y_{n,q} = k)\mathbf{P}(Z_n = q)s^k, \end{aligned} \tag{1}$$

La dernière ligne est due à l'indépendance de Z_n et de $Y_{n,1} + ... + Y_{n,q}$. Cette indépendance provient de ce pour $n \geq 1$ que Z_n n'est fonction qu des $Y_{p,i}$, pour $i \in \mathbf{N}$ et $p \in [\![0, n-1]\!]$ et que les variables aléatoire $(Y_{n,i})$, $(n,i) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ sont mutuellement indépendantes (lemme de coalition).

En remplant dans la formule précédente s par $|s|$ on obtient $G(|s|)$, et l'on a donc par le théorème de Fubini-Tonelli, pour tout $s \in [-1, 1-]$ la sommabilité de la famille à termes positifs

$$\big(\mathbf{P}(Y_{n,1} + ... + Y_{n,q} = k)\mathbf{P}(Z_n = q)|s|^k\big)_{(k,q)\in\mathbf{N}^2}$$

donc par définition celle de la famille $\big(\mathbf{P}(Y_{n,1} + ... + Y_{n,q} = k)\mathbf{P}(Z_n = q)s^k\big)_{(k,q)\in\mathbf{N}^2}$. En appliquant alors le théorème de Fubini-Lebesgues pour les familles de réels :

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_{n,1} + ... + Y_{n,q} = k)\mathbf{P}(Z_n = q)s^k, \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_n = q)G_{Y_{n,1}+....+Y_{n,q}}(s) \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_n = q)G_{Y_{n,1}}(s) \times ... \times G_{Y_{n,q}}(s) \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Z_n = q)G_Y^q(s) \\ &= G_n(g(s)). \end{aligned} \tag{2}$$

Les deux dernières égalités proviennent de l'indépendance de $Y_{n,1}, ..., Y_{n,q}$ et de ce que ces variables suivent toutes la loi de Y. Donc $G_{n+1} = G \circ g$ et par une récurrence immédiate on a :

$$G_n = g^{[n]},$$

où $g^{[n]} := \underbrace{g \circ .... \circ g}_{n \text{ termes}}$.

2. Étude de g

   (a) Montrer que g est strictement croissante sur $[0, 1]$.

   (b) On suppose que $p_0 + p_1 \neq 1$. Montrer que g est strictement convexe.

   (c) On suppose que $p_0 + p_1 = 1$. Que dire de g ?

3. Extinction des patronymes

   On note A l'événement « la suite (Z_n) s'annule », qui caractérise l'extinction du patronyme,

$$A = \{\exists n \in \mathbf{N} | Z_n = 0\}.$$

   (a) Notons que A sécrit

$$A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{Z_n = 0\}$$

   et que pour tout élément ω de Ω et tout élément n de $\mathbf{N}$, on a $Z_n(\omega) = 0$, alors $Z_{n+1}(\omega) = 0$ (convention sur une somme vide). Donc la suite d'événements $(\{Z_n = 0\})_{n \in \mathbf{N}}$ croît. Il résulte de la continuité monotone que :

$$g^{[n]}(0) = G_n(0) = \mathbf{P}(Z_n = 0) \underset{n \to +\infty}{\to} \mathbf{P}(A). \tag{3}$$

   Autrement dit $\mathbf{P}(A)$ est la limite de la suite des itérée de 0 par g, la continuité de g (somme d'une série entière) assure donc que $\mathbf{P}(A)$ est un point fixe de g.

   (b) On suppose $m < 1$. En étudiant les varaiations de ϕ, montrer que $\mathbf{P}(A) = 1$.

   Le patronyme s'éteint presque sûrement.

   (c) On supose à présent que $m > 1$. Montrer que la restriction de g à $]0, 1[$ admet un et un seul point fixe v.

   Indications pour la rédaction $\phi(1) = 0$, $\phi'(1) > 0$, donc par développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 1 on a un équivalent de ϕ au voisinage de 1 et que ϕ est négative au voisinage à gauche de 1. Comme $\phi(0) > 0$ on a un point fixe. S'il y avait deux points fixes autre que 1 en appliquant Rolle deux fois par exemple on a une contradiction. $(g^{[n]}(0))_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas vers 1. Si cette suite convergeait vers 1 elle serait ultimement à valeurs dans $]v, 1]$ et même $]v, 1[$ mais ϕ est négatif donc la suite décroît

   (d) On suppose que $m = 1$. Montrer que g est strictement convexe. On suppose que la restriction de g à $]0, 1[$ admet un v. Montrer que g coïncide avec l'identité sur $[v, 1]$. En déduire que $\mathbf{P}(A) = 1$.

PROBLÈME 2 : EXPONENTIELLE DE MATRICE

Exponentielle de matrice —

On admet les résultats de TD sur la décomposition de Dundford.

On rappelle le résultat au programme : *Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent entre eux, alors* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

On désigne par n un entier ≥ 1 et par M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. déterminer $\mathrm{Det}(\exp(M))$. Il suffit de trigonaliser !
2. Montrer que si M est diagonalisable, alors $\exp(M)$ l'est. Très faclile !
3. (a) Donner la décomposition de Dundford de $\exp(M)$. On par de celle de M, .

$$M = D + N.$$

   Comme N et D commutent

$$\exp(M) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n) ;$$

   de plus $\exp(D)$ est diagonalisable reste à montre que $\exp(D)(\exp(N) - I_n)$ est nilpotent

   (b) Si $\exp(M)$ est diagonalisable alors par unicité de la décomposition de Dundford $\exp(D)(\exp(N) - I_n)$puis $(\exp(N) - I_n)$ sont nulles. Reste a montre que N est nulle.

   On trouve dans la littérature $(\exp(N) - I_n) = Np(N)$ où $p = 1 + \frac{1}{2}X^2 + ...$ On montre l'inversibilité de $p(N)$ donc la nulité de N.

   Je pense que l'on peut aussi dire que pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $\exp(tM)$ diagonalisable donc $(\exp(tN) - I_n)$ est nulle. En dérivant en t le résultat tombe.

   La réciproque est a été faite.

4. comme $\exp(M)$ est la limite d'une suite de polynômes en M et que $\mathbf{K}[M]$ est un espace vectoriel de dimension finie donc fermé, le résultat tombe.

   il n'existe pas de polynôme P_0 tel que pour tout élément $A \in \mathcal{M}_n\mathbf{C}$, $\exp(A) = P_0(A)$ considérere $A_t = \mathrm{diag}(t, 0, 0, ..., 0)$. On a $e^t = p_0(t)$ pour tout t......

5. (a) Soit N une matrice élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe élément de A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\exp(A) = I + N$.On s'inspire de la série donnant le logarithme de $(1 + x)$ en tenant compte du caractère nilpotent de N.

   En notant p l'ordre de nilpotence de N on pose :

$$P = \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k-1}}{k} X^k, \ A = P(N).$$

   La clef du succès et de considérer non pas des séries entières, mais des développements limités.

   D'abord il faut vérifier que A est nilpotente d'indice p ou moins. Ensuite on a le développement à l'ordre $p - 1$,

$$\exp(\ln(1 + c) = 1 + x + O(x^p) \ (x \to 0).$$

   Mais la pratique des développements limités de la composé par troncation) nous apprend que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(p(x))^k}{k!} = 1 + x + x^p q(x)....$$

   Reste à substituer.....

   (b) En déduire que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

   Montrons que tout élément de $\mathrm{GL}_n(()\mathbf{C})$ est une exponentielle. Cette matrice est semblable avec les notations du cours à

$$\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{k_1} + N_1, ..., \lambda_1 I_{k_k} + N_k)$$

   son inversibilité exigeant que les λ_i soient non nuls.

   Il suffit d'écrire chaque matrice $I_{k_k} + N_k$ comme une expoentielle. ce qui résulte directement de la question précédente est de ce que λ_i est l'exponentielle de $\ln(|\lambda_i|) + \mathrm{i}\theta_i$, où θ_i est un argument de λ_i

   (c) Même principe !

6. L'exponentielle de matrice est-elle injective de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$? Non, ce même pour $n = 1$ $(\exp(0) = \exp(i2\pi))$!

7. Montrer que la restriction de l'exponentielle de matrice au sous-espace vectoriel des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisables est injectif.

   Exercice traité en cours !

8. Montrer que l'exponentielle de matrice définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^+$ mais est non surjectif de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.

   La première question assure que $\exp(M)$ a un déterminant positif strictement.....

   La non surjectivité vient de ce que pour $n \geq 2$, la matrice $A = \mathrm{diag}(-1, -2, 3, ..., n)$ n'est pas une exponentielle ! En effet si on avait $A = \exp(B)$, par commutation de A et B et le fait que les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes A serait diagonale !

9. Étude de $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ **Facultatif.**

   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que A est diagonalisable. Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(p(A)) = A$.

   Merci Lagrange !

   (b) En utilisant la décomposition de Dundford, montrer qu'il existe $p \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(p(M)) = M$, avec toujours $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

   Partons de la décomposition de Dundford de M :

$$M = D + N,$$

   de plus cf. TD $D = q(M)$ et $N = r(N)$ où q et r sont des polynômes. Par la question précédente

$$M = \exp(p(D))(I_n + \exp(-P(D)N) = \exp(\tilde{p}(M))(I_n + \exp(-P(D)N).$$

   Reste à voir la nilpotence de $\exp(-P(D)N$ et d'utiliser 5.(a), pour avoir $(I_n + \exp(-P(D)N)$ comme une exponentielle d'un polynôme en $\exp(-P(D)N$ matrice elle-même un polynôme en M...

   Retrouver le résultat de la question 7. Immédiat.

(c) Déduire de ce qui précède que :

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), A = B^2\right\}.$$

Soit A une matrice de la forme $A = B^2$ avec B réelle ! Par la question précédente ou 7, B s'écrit

$$B = \exp(p(B)),$$

avec $P \in \mathbf{C}[X]$; mais $B = \bar{B} = \exp(\bar{p}(B))$....

La réciproque est triviale.

(d) si $A \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$. D'après le premier chapitre $A = T\mathrm{diag}(1, 1, ...1, \det(A))T'$, où T et T' sont des produits de transvections réelles. Il ne reste plus qu'à écrire une transvection est un carré de transvections, bien évident si l'on connait l'effet produit par la multiplication par une transvection et d'appliquer la question précédente aux transvections et à $\mathrm{diag}(1, 1, ..., 1, \det(A))$, pour avoir A comme un produit d'exponentielles.

Donc le groupe G engendré par $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.