DM bis n°14

Autour des exponentielles de matrices

Dans tout le sujet, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|I_n\| = 1. \qquad (N_1)$$
$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|. \qquad (N_2)$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice, notée $\mathbf{e}^A$, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$\mathbf{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$f_A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad t \mapsto f_A(t) = \mathbf{e}^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_A'(t) = A\mathbf{e}^{tA} = \mathbf{e}^{tA}A.$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors

$$\mathbf{e}^B = P^{-1}\mathbf{e}^A P.$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit leur crochet de Lie par

$$[A,B] = AB - BA.$$

La partie 4 du problème est indépendante des parties 2 et 3 .

1 Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1 $\triangleright$ Montrer que les matrices A et $\mathbf{e}^B$ commutent.

On définit une application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{t(A+B)}\mathbf{e}^{-tB} \end{array}$$

2 $\triangleright$ Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy.

En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{t(A+B)} = \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB} \qquad (1)$$

3 $\triangleright$ Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.

4 $\triangleright$ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, prouver la relation $\left\|\mathbf{e}^A\right\| \leq e^{\|A\|}$.

5 $\triangleright$ Montrer que $\det\left(\mathbf{e}^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

2 Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\mathbf{e}^{\frac{1}{k}A}\mathbf{e}^{\frac{1}{k}B}\right)^k = \mathbf{e}^{A+B} \text{ ou } \lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k = \exp(A+B) \qquad (2)$$

Pour k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{1}{k}(A+B)\right).$$

6 $\triangleright$ Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)$$

On introduit la fonction

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{tA}\mathbf{e}^{tB} - \mathbf{e}^{t(A+B)} \end{array}$$

7 $\triangleright$ Montrer que

$$X_k - Y_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ lorsque } k \to +\infty$$

8 $\triangleright$ Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i\left(X_k - Y_k\right)Y_k^{k-i-1}$$

En déduire la relation (2).

3 Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit groupe spécial linéaire :

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

Si G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, on introduit son algèbre de Lie :

$$\mathcal{A}_G = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}.) \mid \forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{e}^{tM} \in G\right\}.$$

L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$, sont bien des sous groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9 $\triangleright$ Déterminer $\mathcal{A}_G$ lorsque $G = SL_n(\mathbb{R})$.

10 $\triangleright$ Si $G = O_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11) à 14), G est un sous-groupe fermé quelconque de $GL_n(\mathbb{R})$.

11 $\triangleright$ En utilisant la partie 2 , montrer que $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12 $\triangleright$ Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & \mathbf{e}^{tA}.B.\mathbf{e}^{-tA} \end{array}$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.

13 $\triangleright$ En déduire que $\mathcal{A}_G$ est stable par le crochet de Lie, i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A}_G, \forall B \in \mathcal{A}_G, [A, B] \in \mathcal{A}_G.$$

On rappelle que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(R)$, on dit que M est tangente à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L'ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé espace tangent à G en I_n, et noté $\mathcal{T}_{I_n}(G)$.

On rappelle aussi que l'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14 $\triangleright$ Prouver l'inclusion $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 $\triangleright$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe, soit l'application $\delta_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \delta_M(t) = \det(I_n + tM)$.

En utilisant un développement limité à l'ordre 1 , montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta'_M(0)$.

16 $\triangleright$ Montrer que la différentielle au point I_n de l'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme linéaire "trace".

17 $\triangleright$ Montrer que, dans les cas particuliers $G = SI_n(\mathbb{R})$ et $G = O_n(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{T}_{I_n}(G) = A_G$.

4 Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β. On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double.

18 $\triangleright$ Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel. puis $\mathbf{e}^{tT}$ pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim\limits_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On pose $E = \mathbb{C}^n$. L'espace vectoriel E, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$, on rappelle qu'elles sont toutes équivalentes. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et a celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i,j) \in [[1,n]]^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice $\mathbf{e}^{tA}$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_A(t) = \mathbf{e}^{tA} = (v_{i,j}(t))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A, on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \ker\left((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}\right) = \ker\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}\right).$$

On posera aussi $\alpha = \max\limits_{\lambda \in Sp(A)} \mathrm{Re}(\lambda)$.

19 $\triangleright$ Montrer que, si $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha < 0$.

20 $\triangleright$ Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} F_\lambda$.

21 $\triangleright$ En déduire l'existence de trois matrices P, D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : P est inversible, D est diagonale, N est nilpotente,

$$\begin{aligned} & P \text{ est inversible,} \\ & D \text{ est diagonale,} \\ & N \text{ est nilpotente} \\ ND \;=\; & DN\,, \quad A = P(D+N)P^{-1} \quad \text{et} \quad \chi_A = \chi_D \end{aligned}$$

22 $\triangleright$ En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = O\left(t^p \mathbf{e}^{\alpha t}\right) \text{ lorsque } t \to +\infty$$

23 $\triangleright$ Etudier la réciproque de la question 19).

24 $\triangleright$ On suppose, *dans cette question seulement*, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbf{e}^{tA} X = 0 \iff X = 0$$

Dans les questions qui suivent, on introduit les polynômes suivants :

$$\begin{aligned} P_s(X) &= \prod_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mathrm{Re}(\lambda)<0}} (X-\lambda)^{m_\lambda} \\ P_i(X) &= \prod_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mathrm{Re}(\lambda)>0}} (X-\lambda)^{m_\lambda} \\ P_n(X) &= \prod_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \mathrm{Re}(\lambda)=0}} (X-\lambda)^{m_\lambda} \end{aligned}$$

et les sous-espaces $E_s = \ker\left(P_s(A)\right), E_i = \ker\left(P_i(A)\right)$ et $E_n = \ker\left(P_n(A)\right)$ de $E = \mathbb{C}^n$. *Les indices s,i,n signifient respectivement stable, instable et neutre.*

25 $\triangleright$ Après avoir justifié que $E = E_s \oplus E_1 \oplus E_n$. montrer que

$$E_s = \left\{ X \in E \mid \lim_{t \to +\infty} \mathbf{e}^{tA} X = 0 \right\}.$$

On prouverait de même, mais ce n'est pas demandé, que

$$E_i = \left\{ X \in E \mid \lim_{t \to -\infty} \mathbf{e}^{tA} X = 0 \right\}.$$

26 $\triangleright$ Montrer que

$$E_n = \left\{ X \in E \mid \exists C \in \mathbb{R}_+^* \ \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \left\| \mathbf{e}^{tA} X \right\|_E \leq C(1 + |t|)^p \right\}.$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de C^n tels que la fonction vectorielle $t \mapsto \mathbf{e}^{tA} X$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.

FIN DU PROBLEME