X, Première composition MP 2010

Corrigé rédigé par Denis Choimet

L'auteur de ce corrigé remercie par avance les lecteurs qui voudront bien lui indiquer les erreurs qu'ils auront détectées.

Préliminaires

1.a) Si β est nulle, alors α l'est aussi et le résultat est évident avec $\lambda = 0$. Dans le cas contraire, on peut choisir un vecteur b de $\mathbb{R}^n$ tel que $\beta(b) = 1$. En posant $\lambda = \alpha(b)$, on voit que les formes linéaires $\lambda\beta$ et α coïncident sur $\ker\beta$ et sur $\mathbb{R}b$, donc sur $\mathbb{R}^n$ puisque $\mathbb{R}^n = \ker\beta \oplus \mathbb{R}b$.

$$\boxed{\text{Il existe donc } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \alpha = \lambda\beta.}$$

1.b) Raisonnons par récurrence sur $r \geq 1$ comme le suggère l'énoncé.

- Si $r = 1$, le résultat relève de la question **1.a)**.
- Soit $r \geq 2$, supposons le résultat vrai au rang $r-1$, et soit $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que
$$\bigcap_{i=1}^{r} \ker\beta_i \subset \ker\alpha.$$
Posons
$$F = \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker\beta_i,$$
et notons $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta_r}$ les restrictions de α et β_r à F. On a alors
$$\ker\widehat{\beta_r} = F \cap \ker\beta_r = \bigcap_{i=1}^{r} \ker\beta_i \subset \ker\alpha.$$
Comme $\ker\widehat{\beta_r}$ est également contenu dans F, on a en réalité
$$\ker\widehat{\beta_r} \subset F \cap \ker\alpha = \ker\widehat{\alpha}.$$
D'après la question **1.a)**, il existe un réel λ_r tel que
$$\widehat{\alpha} = \lambda_r\widehat{\beta_r},$$
ce qui signifie que la forme linéaire $\alpha - \lambda_r\beta_r$ est nulle sur F. D'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire
$$\alpha - \lambda_r\beta_r = \sum_{i=1}^{r-1} \lambda_i\beta_i \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R},$$
d'où le résultat.

Remarque 1. On peut aussi raisonner par dualité, en notant que l'hypothèse peut s'écrire
$$(\mathrm{Vect}\,(\beta_1, \ldots, \beta_r))_\perp \subset (\mathbb{R}\alpha)_\perp,$$
d'où
$$((\mathrm{Vect}\,(\beta_1, \ldots, \beta_r))_\perp)^\perp \supset ((\mathbb{R}\alpha)_\perp)^\perp,$$
soit (dimension finie !)
$$\mathbb{R}\alpha \subset \mathrm{Vect}\,(\beta_1, \ldots, \beta_r).$$

2. On a

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = \|\gamma(t)\|^2 = 1 \text{ pour } |t| < 1.$$

En dérivant cette identité, on obtient

$$\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle + \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0,$$

d'où

$$\boxed{\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \text{ pour } |t| < 1.}$$

3. Définissons tout naturellement l'application

$$\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^n, t \mapsto \frac{x + tv}{\|x + tv\|}.$$

On observe tout d'abord que γ est bien définie, car la famille (x, v) est libre. En écrivant

$$\gamma(t) = \frac{x + tv}{(\|x + tv\|^2)^{1/2}} = \frac{x + tv}{(1 + t^2\|v\|^2)^{1/2}},$$

on voit que γ est de classe C^1. Bien évidemment, $\gamma(0) = \frac{x}{\|x\|} = x$. Enfin on a, lorsque $t \to 0$:

$$\gamma(t) = (1 + o(t))(x + tv) = x + tv + o(t),$$

d'où $\gamma'(0) = v$. En définitive,

$$\boxed{\gamma \text{ est } C^1, \ \|\gamma(t)\| = 1 \text{ pour } |t| < 1, \ \gamma(0) = x \text{ et } \gamma'(0) = v.}$$

Remarque 2. L'interprétation géométrique des questions **2.** et **3.** est la suivante : l'espace (affine) tangent à la sphère S^{n-1} au point x est l'hyperplan affine $x + x^\perp$.

4. La fonction f est continue (car de classe C^1) sur $\mathbb{R}^n$, de sorte que g l'est sur S^{n-1}. D'autre part, la sphère S^{n-1} est compacte car $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie. Cela prouve que

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ admet des extrema.}}$$

Soit $x \in S^{n-1}$ un point en lequel g atteint un extremum. Fixons $v \in x^\perp$ non nul. En conservant les notations de la question précédente, définissons l'application

$$\phi :]-1, 1[\to \mathbb{R}, t \mapsto g(\gamma(t)) = f(\gamma(t)).$$

Elle est de classe C^1, et admet en 0 un extremum. Par suite, $\phi'(0) = 0$. Or,

$$\phi'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)),$$

d'où

$$\phi'(0) = df_x(v).$$

Ainsi, $df_x(v) = 0$ pour tout $v \in x^\perp$. Ou encore :

$$\ker\langle x, \cdot \rangle \subset \ker df_x.$$

D'après la question **1.**, il existe un réel λ tel que

$$\boxed{df_x(h) = \lambda \langle x, h \rangle \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n.}$$

5. La fonction f est de classe C^1, car polynomiale. Pour calculer sa différentielle, on fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et on écrit, pour $h \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x+h) - f(x) = \langle x, Ah\rangle + \langle h, Ax\rangle + \langle h, Ah\rangle = \underbrace{2\langle Ax, h\rangle}_{\text{linéaire (et continu) en } h} + \langle h, Ah\rangle,$$

la dernière égalité ayant lieu parce que A est symétrique. Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle h, Ah\rangle| \leq \|A\|_{\text{sub}} \cdot \|h\|^2,$$

si bien que

$$\langle h, Ah\rangle = o(\|h\|) \text{ quand } h \to 0.$$

On a donc prouvé que

$$\boxed{df_x(h) = 2\langle Ax, h\rangle \text{ pour } h \in \mathbb{R}^n.}$$

5.b) Soit x un vecteur en lequel la restriction de f à S^{n-1} présente un extremum. D'après les questions précédentes, il existe un réel λ tel que

$$2\langle Ax, h\rangle = \lambda\langle x, h\rangle \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}^n.$$

Comme le produit scalaire est non dégénéré, cela oblige

$$Ax = \frac{\lambda}{2}x.$$

Comme x est de plus non nul,

$$\boxed{x \text{ est un vecteur propre de } A.}$$

Deuxième partie

6.a) Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\operatorname{tr}({}^t MM) = \sum_{j=1}^{n} [{}^t MM]_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}^2,$$

d'où

$$\boxed{q(M) = \operatorname{tr}({}^t MM).}$$

6.b) La linéarité « à droite » provient de la linéarité de la trace. La symétrie se voit en écrivant

$$\operatorname{tr}({}^t AB) = \operatorname{tr}\left({}^t({}^t AB)\right) = \operatorname{tr}({}^t BA).$$

Enfin, le caractère défini positif découle de la question précédente.

6.c) La fonction q est de classe C^1 car polynomiale. Pour calculer sa différentielle, on fixe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on écrit, pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$q(M+H) - q(M) = \operatorname{tr}({}^t MH) + \operatorname{tr}({}^t HM) + \operatorname{tr}({}^t HH) = 2\operatorname{tr}({}^t MH) + \|H\|^2,$$

en notant $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire défini à la question **6.b)**. On a donc, lorsque $H \to 0$:

$$q(M+H) - q(M) = \underbrace{2\operatorname{tr}({}^t MH)}_{\text{linéaire en } H} + o(\|H\|),$$

ce qui prouve que

$$\boxed{dq_M(H) = 2\operatorname{tr}({}^t MH) \text{ pour } H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

7. Nous noterons M_{ij} le cofacteur d'indice (i,j) de la matrice M. Rappelons que ce cofacteur est égal à $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, où Δ_{ij} désigne le déterminant de la matrice obtenue à partir de M en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne. En développant $\det(M + tE_{ij})$ selon sa j-ième colonne, on obtient

$$\det(M + tE_{ij}) = (m_{ij} + t)M_{ij} + \sum_{k \neq i} m_{kj}M_{kj} = \boxed{\det M + tM_{ij}.}$$

En particulier,
$$\frac{\det(M+tE_{ij})-\det M}{t}\to M_{ij} \text{ quand } t\to 0.$$
Cela prouve que
$$df_M(E_{ij})=M_{ij}.$$
Ensuite, si $H=\sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}E_{ij}\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a
$$df_M(H)=\sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}df_M(E_{ij})=\sum_{1\le i,j\le n} h_{ij}M_{ij},$$
soit
$$\boxed{df_M(H)=\operatorname{tr}({}^t\widetilde{M}\,H).}$$

8. La fonction f est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})=f^{-1}(\{0\})$. Cela prouve que
$$\boxed{\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \text{ est un fermé de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$
Malheureusement, $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas du tout compact ! En revanche, comme la fonction q est positive, on peut certainement poser
$$\mu=\inf\{q(M), M\in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})\},$$
et il existe une suite $(M_k)_{k\ge 1}$ de matrices de $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ telle que
$$q(M_k)\to\mu. \tag{1}$$
Or, la fonction $\sqrt{q}$ est une norme ! Ainsi, la suite $(M_k)_{k\ge1}$ est bornée. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une extraction φ et une matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$M_{\varphi(k)}\to M.$$
Comme $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a en réalité $M\in\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$. La continuité de q donne alors
$$q(M_{\varphi(k)})\to q(M). \tag{2}$$
En définitive, (1) et (2) donnent $q(M)=\mu$, autrement dit :
$$\boxed{\text{la restriction } g \text{ de } q \text{ à } \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \text{ possède un minimum.}}$$

9. Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'idée est de trigonaliser M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On écrit donc $M=PTP^{-1}$, où $P\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ et T est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux (disons) $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Les λ_j sont les valeurs propres, distinctes ou non, de M. On a alors, pour $N\ge 0$:
$$\sum_{k=0}^{N}\frac{M^k}{k!}=P\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{T^k}{k!}\right)P^{-1},$$
d'où, en laissant N tendre vers $+\infty$:
$$\exp M=P(\exp T)P^{-1}$$
par continuité du produit matriciel. On en déduit en particulier que
$$\det(\exp M)=\det(\exp T).$$
Or, la matrice $\sum_{k=0}^{N}\frac{T^k}{k!}$ est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont les $\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_j^k}{k!}$. La matrice $\exp T$ est donc elle aussi triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont les e^{λ_j}. Tout cela donne
$$\det(\exp T)=\prod_{j=1}^{n}e^{\lambda_j}=\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)=\exp(\operatorname{tr} M).$$

En définitive,
$$\boxed{\det(\exp M) = \exp(\operatorname{tr} M).}$$

10. La fonction γ est de classe C^1 d'après un fait rappelé dans le préambule. De plus, d'après la question précédente, on a

$$\det \gamma(t) = \det M \cdot \det \exp(tM^{-1}H) = \exp(t \cdot \operatorname{tr}(M^{-1}H)).$$

Or, par hypothèse, $df_M(H) = 0$, soit $\operatorname{tr}({}^t\widetilde{M}\, H) = 0$, soit encore $\operatorname{tr}(M^{-1}H) = 0$ puisque $\det M = 1$. Cela donne
$$\boxed{\gamma(t) \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) \text{ pour } |t| < 1.}$$

D'autre part, on a bien sûr $\gamma(0) = M$, et

$$\boxed{\gamma'(t) = M \cdot M^{-1}H = H.}$$

11.a) On raisonne comme à la question **4.**, en définissant la fonction

$$\phi :]-1, 1[\to \mathbb{R}, t \mapsto g(\gamma(t)) = q(\gamma(t)).$$

Elle est de classe C^1 et présente un extremum en 0. Sa dérivée en 0 est donc nulle, ce qui donne

$$\boxed{dq_M(H) = 0.}$$

11.b) Explicitons cette condition grâce à la question **6.c)** :

$$\operatorname{tr}({}^tMH) = 0 \text{ pour tout } H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \operatorname{tr}(M^{-1}H) = 0.$$

D'après la question **1.**, il existe un réel λ tel que

$$\operatorname{tr}({}^tMH) = \lambda \cdot \operatorname{tr}(M^{-1}H) \text{ pour tout } H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que la matrice $M - \lambda\, {}^tM^{-1}$ est orthogonale à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, au sens du produit scalaire de la question **6.b)**. Cette matrice est donc nulle, ce qui donne $M = \lambda\, {}^tM^{-1}$, soit

$${}^tMM = \lambda I_n.$$

En prenant le déterminant, nous obtenons, compte tenu du fait que $\det M = 1$: $\lambda^n = 1$. De plus, la matrice ${}^tMM$ est symétrique positive, puisque

$$\langle {}^tMMx, x\rangle = \|Mx\|^2 \geq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

Cela oblige λ à être un réel positif, et finalement on obtient $\lambda = 1$, de sorte que

$$\boxed{\text{la matrice } M \text{ est orthogonale.}}$$

En particulier,
$$\boxed{q(M) = n.}$$

Troisième partie

12.a) Ayant fixé $t \in \mathbb{R}$, on écrit, pour $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B(t+h) &= \big(C_1(t) + hC_1'(t) + o(h)\big)\big(C_2(t) + hC_2'(t) + o(h)\big) \\ &= B(t) + h(C_1'(t)C_2(t) + C_1(t)C_2'(t)) + o(h). \end{aligned}$$

On en déduit que
$$\boxed{B'(t) = C_1'(t)C_2(t) + C_1(t)C_2'(t).}$$

12.b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a
$$D(t) = C(t)^{-1} = \frac{1}{\det C(t)} {}^t\widetilde{C(t)},$$
et cette égalité prouve que la fonction D est de classe C^1, car les coefficients de $D(t)$ sont des fonctions rationnelles des coefficients de $C(t)$. On écrit alors
$$C(t)D(t) = I_n,$$
et on dérive cette identité ; cela donne
$$C'(t)D(t) + C(t)D'(t) = 0,$$
d'où
$$\boxed{D'(t) = -C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}.}$$

13.a) Il suffit de poser
$$\boxed{A(t) = I_n + t(\alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)) \text{ pour } t \in \mathbb{R}.}$$

Remarque 3. L'intérêt de cette question ne saute pas aux yeux...

13.b) Cela résulte de la continuité des fonctions C_1 et C_2 et de l'ouverture du groupe linéaire dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

13.c) On pose
$$L(s,t) = C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} \text{ pour } s,t \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$
On a, grâce aux questions **12.a)** et **12.b)** :
$$\frac{\partial L}{\partial t}(s,t) = C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} - C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1},$$
puis
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(s,t) \quad = \quad & C_1'(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} - C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} \\ & -C_1'(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1} \\ & +C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C_2'(t)C_2(t)^{-1}.\end{aligned}$$
En particulier,
$$\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0) - C_1'(0)C_2'(0) + C_1'(0)C_2'(0)$$
d'où finalement
$$\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0).}$$

14.a) Soit $X, X' \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. On a, pour $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\Phi(X) \circ \Phi(X')(Y) = \Phi(X)(X'YX'^{-1}) = XX'YX'^{-1}X^{-1} = (XX')Y(XX')^{-1} = \Phi(XX')(Y).$$
Cela prouve que
$$\Phi(X) \circ \Phi(X') = \Phi(XX'),$$
donc que
$$\boxed{\Phi \text{ est un morphisme de groupes.}}$$
En écrivant
$$XYX^{-1} = \frac{1}{\det X} XY {}^t\widetilde{X},$$

on voit que *les coefficients de XYX^{-1} sont des fractions rationnelles des coefficients de X et Y*. En particulier, pour chaque $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\text{l'application } \Phi_Y : \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), X \mapsto XYX^{-1} = \Phi(X)(Y) \text{ est de classe } C^1. \tag{3}$$

Il s'agit d'en déduire que l'application Φ est elle-même de classe C^1, ce qui demande un minimum de soin. Fixons une base $(e_i)_{1\leq i\leq n^2}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et notons $(e_i^*)_{1\leq i\leq n^2}$ sa base duale. On a alors, pour $X \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\Phi(X)(Y) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(Y)\Phi(X)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(Y)\Phi_{e_i}(X).$$

ce qu'on peut écrire plus synthétiquement :

$$\Phi(X) = \sum_{1\leq i,j\leq n^2} e_i^* \cdot \Phi_{e_i}(X).$$

Cette expression et la remarque (3) montrent que

$$\boxed{\Phi \text{ est de classe } C^1.}$$

14.b) Soit $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit, on a

$$\Phi(I_n + tX)(Y) = (I_n + tX)Y(I_n + tX)^{-1}$$

Grâce aux questions **12.a)** et **12.b)**, on obtient

$$\frac{d}{dt}\Phi(I_n + tX)(Y) = XY(I_n + tX)^{-1} - (I_n + tX)Y(I_n + tX)^{-1}X(I_n + tX)^{-1},$$

d'où en particulier

$$\frac{d}{dt}\Phi(I_n + tX)(Y)\Big|_{t=0} = XY - YX,$$

soit

$$\frac{\Phi(I_n + tX) - \Phi(I_n)}{t}(Y) \to XY - YX \text{ quand } t \to 0.$$

ce qui équivaut à :

$$\boxed{d\Phi_{I_n}(X)(Y) = XY - YX.}$$

15.a) Soit $X \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit, on a $X + tH \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, et

$$f(X + tH) = f(X)f(I_n + tX^{-1}H) = f(I_n + tX^{-1}H)f(X).$$

En dérivant en 0 cette identité, on obtient

$$\boxed{df_X(H) = f(X)df_{I_n}(X^{-1}H) = df_{I_n}(X^{-1}H)f(X).}$$

15.b) Les fonctions a et b sont de classe C^1 (pour a, cela vient du fait que f l'est). De plus, on a, d'après la question précédente

$$a'(t) = df_{\exp(tX)}(X\exp(tX)) = f(\exp(tX))df_{I_n}(X\exp(tX)\exp(-tX)) = a(t)df_{I_n}(X).$$

On en déduit immédiatement que l'application $t \mapsto a(t)\exp(-t\cdot df_{I_n}(X))$ est constante. Comme $a(0) = f(I_n) = \mathrm{id}_V$, on en déduit que

$$a(t) = \exp(t \cdot df_{I_n}(X)) \text{ pour } t \in \mathbb{R},$$

soit

$$\boxed{a = b.}$$

15.c) Choisissons dans cette question pour f l'application

$$f : \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*, X \mapsto \det X.$$

C'est un morphisme de groupes de classe C^1. On peut donc appliquer le résultat de la question **15.b)**, avec $V = \mathbb{R}$ (donc $\mathbf{GL}(V) = \mathbb{R}^*$) et $t = 1$. Dans ce cas, $df_{I_n} = \mathrm{tr}$ d'après la question **7.**, d'où

$$\boxed{\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{tr}\, X).}$$

15.d) En appliquant le résultat de la question **15.b)** avec $f = \Phi$, $V = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $t = 1$, on obtient

$$\boxed{\Phi(\exp(X)) = \exp(\varphi(X)) \text{ pour } X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Remarque 4. À partir de la question **16.**, l'énoncé présuppose (mais sans le dire!) des résultats de régularité de l'exponentielle, sans lesquels la définition de la fonction A et de ses dérivées partielles pose problème. Le sujet aurait par exemple dû admettre clairement le caractère C^∞ de l'exponentielle, ce que nous ferons dans la suite de ce corrigé. On peut justifier sans trop de frais ce fait (non-trivial!) en utilisant la formule de Cauchy suivante [1] :

$$\exp(M) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} e^z (zI_n - M)^{-1} dz,$$

valable si M appartient à l'ensemble (ouvert) des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont le spectre est contenu dans le disque ouvert $D(0,r)$ du plan complexe.

16.a) On a bien sûr $A(1,0) = \exp(-X)\frac{\partial u}{\partial t}(1,0)$. Or,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(u(1,t) - u(1,0)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\exp(X+tY) - \exp(X)\right) = d\exp_X(Y).$$

On a donc montré que

$$\boxed{A(1,0) = \exp(-X) d\exp_X(Y).}$$

16.b) On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial s}(s,t) &= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + \exp(-sX)\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s,t) \\
&= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + \exp(-sX)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(s,t) \text{ d'après le théorème de Schwarz} \\
&= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + \exp(-sX)\frac{\partial}{\partial t}\left((X+tY)\exp(s(X+tY))\right) \\
&= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + \exp(-sX)Y\exp(s(X+tY)) + \exp(-sX)(X+tY)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t).
\end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) &= -X\exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,0) + \exp(-sX)Y\exp(sX) + \exp(-sX)X\frac{\partial u}{\partial t}(s,0) \\
&= \exp(-sX)Y\exp(sX) \text{ car } X \text{ et } \exp(-sX) \text{ commutent} \\
&= \Phi(\exp(-sX))(Y) \\
&= \exp(\varphi(-sX))(Y) \text{ grâce à la question } \mathbf{15.d)}.
\end{aligned}$$

Finalement, comme φ est linéaire, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = \exp(-s\varphi(X))(Y).}$$

1. Voir J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 2000.

16.c) On déduit de la question précédente l'égalité

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s^k \frac{\varphi(X)^k}{k!}(Y) \text{ pour } s\in\mathbb{R}.$$

Fixons $s\in\mathbb{R}$. L'inégalité suivante :

$$\left\|(-1)^k u^k \frac{\varphi(X)^k}{k!}(Y)\right\| \leq \frac{(|s|\cdot\|\varphi(X)\|_{\text{sub}})^k}{k!}\|Y\| \text{ pour } u\in[0,s]$$

prouve la convergence normale sur $[0,s]$ de la série de fonctions (de la variable u) $\sum(-1)^k u^k \frac{\varphi(X)^k}{k!}(Y)$, et légitime son intégration terme à terme sur ce même segment [2]. On en déduit que [3]

$$A(s,0)=A(0,0)+\int_0^s \partial_1 A(u,0)du = A(0,0)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s^{k+1}\frac{\varphi(X)^k}{(k+1)!}(Y)$$

Calculons $A(0,0)$:

$$A(0,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u(0,t)-u(0,0))=0$$

puisque $u(0,t)=I_n$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\boxed{A(s,0)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s^{k+1}\frac{\varphi(X)^k}{(k+1)!}(Y).}$$

16.d) D'après la question **16.a)**, on a

$$d\exp_X(Y)=\exp(X)A(1,0),$$

soit

$$\boxed{d\exp_X(Y)=\exp(X)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varphi(X)^k}{(k+1)!}(Y).}$$

2. En sortant très légèrement du cadre du programme, on peut dire plus rapidement qu'il s'agit d'une série entière de la variable u, à coefficients dans l'espace normé de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et de rayon de convergence infini.

3. On note $\partial_1 A$ la dérivée partielle de la fonction A par rapport à sa première variable.