Exercices d'oraux 2022

Laurent BERNIS

23 mai 2025

Oral 1

A. Déterminer l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ qui commutent avec tous les endomorphismes.

A'. (ENS 2018) Déterminer les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison

A'' (version Centrale). Soit A un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui commute avec tous les éléments de sa classe de conjugaison.

1. Soit λ une valeur propre de A et P un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Comparer $\mathbf{E}_\lambda(A)$ et $\mathbf{E}_\lambda(PAP^{-1})$.
2. On suppose que A laisse stable tous les espaces de dimension k , où $k \in \{2, \dots, n-1\}$.
Montrer que A laisse stable tous les espaces de dimension 1.
3. Montrer que A est une homothétie.

B. Déterminer les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivables telles que $f'(x) = f(-x)$, pour tout réel x .

B'. Déterminer les applications f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ dérivables telles que $f'(x) = f(x^{-1})$, pour tout réel $x > 0$.

Oral 2

A. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E , défini par

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), AMA = 0_n\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A .

B. Soit la fonction I de la variable réelle a définie par

$$I(a) := \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}.$$

Montrer que I est définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

Déterminer les limites éventuelles de I en 0 et $+\infty$.

Oral 3

A. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$. Montrer que l'ensemble E , défini par

$$E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), M^\top AM = 0_n\},$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont on précisera la dimension en fonction du rang de A .

B. Montrer la convergence et donner la valeur de la somme de la série suivante :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Oral 4

A. Déterminer les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ dérivables telles que pour tout x et tout v réels,

$$f(u + v) = f(u)f(v).$$

Reprendre la question en supposant f seulement continue.

A' (ÉNS) . Soit $E = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} | \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)\}$.

1. Déterminer les éléments de E continus.
2. Montrer que le graphe de tout élément de E non linéaire est dense dans $\mathbf{R}^2$.
3. Soit un entier $n \geq 2$ on pose $E_n = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} | \forall x \in \mathbf{R}_+, f(x^n) = f(x)^n\}$.
4. Déterminer les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ linéaires éléments de E_n .
5. On suppose n pair. Déterminer $E \cap E_n$.
6. On suppose n impair. En calculant pour un réel $x > 0$ et un rationnel $t > 0$, la quantité $f((x + t)^n)$, déterminer $E \cap E_n$.

B. (Mines 2024)

Montrer que l'application $f : \mathbf{R}[X]_n \rightarrow \mathbf{R}; \int_0^1 (P(x) - e^x)^2 dx$ admet un point critique et un seul.

Oral 5

A. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ il existe une matrice T semblable à M dont tous les coefficients non diagonaux ont un module inférieur ou égal à ε

A'. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

B. Soit f une application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ développable en série entière sur $\mathbf{C}$ entier.

Montrer que si f est bornée, alors elle est constante.

Oral 6

A. Soit u et v des endomorphisme de $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On suppose que u et v commutent.

Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{E}$ dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.

B. (Centrale 2021)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme f .

1. Soit $r \in]0, R[$. On veut montrer que :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r e^{it} \frac{f(r e^{it})}{r e^{it} - z} dt,$$

pour tout $z \in B_0(0, r)$.

(a) Montrer la formule pour $f : z \mapsto z^n$

(b) Montrer la formule dans le cas général.

2. Soit g une application continue sur $B_0(0, R)$.

On suppose que pour tout $r \in]0, R[$,

$$\forall z \in B_0(0, r), g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r e^{it} \frac{g(r e^{it})}{r e^{it} - z} dt.$$

Montrer que g est développable en séries entières.

Oral 7

A.

1. Soit $u_1, u_2, \dots, u_p$ des endomorphismes de $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On suppose les $u_i, i = 1, \dots, p$, tous diagonalisables et commutant deux à deux.

Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{E}$ dans laquelle les matrices de tous les u_i sont diagonales. On dit que les u_i sont codiagonalisables ou simultanément diagonalisables.

2. Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbf{C})$ abélien. Montrer que tous les éléments de G sont codiagonalisables.

A'. (ÉNS 2018)

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3. Soit l'application

$$\phi : \text{GL}_n(\mathbf{Z}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) ; M \mapsto \bar{M}.$$

On désigne par $\bar{A}$, pour tout élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, la matrice d'ordre n à valeur dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, dont le coefficient d'indice i, j est la classe modulo p de $a_{i,j}$.

Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbf{Z})$, montrer que $\phi|_G$ est injective.

B. Soit h une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $J =]-a, a[$ ($a > 0$), telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $h^{(n)}$ soit positive sur $[0, a[$.

Pour tout entier $N \geq 0$, on note $R_N(x) = h(x) - \sum_{n=0}^N \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

1. Pour tout couple de réels (x, y) vérifiant $0 < x < y < a$, et tout entier $N \geq 0$, montrer que :

$$0 \leq R_N(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y).$$

2. En déduire que h est somme de sa série de Taylor en 0 sur $[0, a[$.

B' Soit g l'application définie sur $I = \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par $g(x) = \tan x$. Montrer que g est développable en série entière.

Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 de g .

Oral 8

A. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe un réel $R \geq 0$ tel que, pour tout entier $k \geq 0$ et tout réel $r \geq R$,

$$A^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta} (r e^{i\theta} I_n - A)^{-1} d\theta.$$

En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

B. Soit n un entier naturel non nul et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que la matrice A est la somme de deux matrices inversibles.

Oral 9

A. Soit pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, n$ des variables aléatoires $X_{i,j}$ i.i.d suivant la loi de Randmacher. Et M_n la matrice aléatoire $(X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Calculer $E(\text{tr}(M_n^k))$, pour $k = 1, 2, 3, 4$.
2. Calculer $E(\det(M_n))$ et $E(\det(M_n))^2$.
3. Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\lim_{+\infty} = +\infty$.

Montrer que $\mathbf{P}(|\det M_k| \geq f(k)\sqrt{k!}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

B. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ strictement triangulaire supérieur est nilpotent.

- Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, dont tous les éléments sont nilpotents.

Oral 10

A. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbf{R})$.

A' Soit V un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ dont tous les éléments sont diagonalisables dans $\mathbf{R}$.

- Montrer que I_2 est élément de V .
- Donner un exemple d'un tel hyperplan V .
- Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbf{R})$ tel que $P^{-1}VP$ contienne toutes les matrices diagonales.
- Montrer qu'il existe $Q \in \text{GL}_2(\mathbf{R})$ tel que $Q^{-1}VQ = \mathcal{S}_2$.

B. Soient a et b des réels. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a, u_1 = b, \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ en fonction de a et b .

B'. On suppose a et b strictement positifs et $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes. On considère la suite aléatoire $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$), définie par

$$v_0 = a, v_1 = b \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + X_n v_n.$$

Montrer que la suite v converge presque sûrement vers $+\infty$.

Oral 11

B. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Pour $k = 1, 2, \dots, n$, on note

$$Y_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i=k}$$

et $Z = \max\{Y_k, k = 1, \dots, n\}$.

- Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, Montrer que $e^{\lambda E(Z)} \leq n E(e^{\lambda Y_1})$.
- Montrer que

$$E(Z) \leq \frac{2 \ln n}{\ln(1 + \ln(n))}.$$

Oral 12 A. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | z = x^2 + y^2\}.$$

Déterminer le plan tangent en un point (a, b, c) de $\mathcal{V}$.

B. Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ de mêmes lois

On étudie sous différentes hypothèses l'inégalité

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1 \tag{1}$$

- On suppose X et Y indépendantes. Montrer (1).
- On ne suppose plus X et Y indépendantes, mais que $\ln(X) \in L_1$. Montrer (1).

B' ; (ÉNS 2024)

Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ de mêmes lois

Montrer

$$\mathbf{E} \left(\frac{X}{Y} \right) \geq 1$$

Oral 13 A. Soit C un convexe fermé de $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit a un point de $\mathbf{R}^2$. Montrer qu'il existe un et un seul élément c de C tel que $\|a - c\| = d(a, C)$.
2. Montrer que si d est un point de C , on a l'équivalence des deux propositions suivantes
 - i. $d = c$;
 - ii. pour tout $m \in c, \langle a - d | m - d \rangle \leq 0$.

A' soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n supérieure ou égale à 2. Soit C un convexe ouvert de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle ne coupant pas C .

B. Soient $A_1, A_2 \dots A_n$ des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent deux à deux. Montrer qu'elles sont cotrigonalisables.

Oral 14

A. Montrer que l'ensemble des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien est compact.

A'. (ÉNS 2024) Soient $n \in \mathbf{N}^*, r \in \{0, n\}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathbf{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique) de rang r . Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{P}$ en un point p_0 .

B. Soit $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

ORAL 15 —

A. Montrer que $O_n(\mathbf{R})$ est compact et connexe par arcs.

A' Soit N une norme sur un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie. On note $O(N)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{E}$ qui conservent la norme. Montrer que $O(N)$ est compact.

B. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{C})$. Montrer que tout élément A de G est diagonalisable. Montrer que $\sum_{A \in G} A$ est diagonalisable.

Oral 16 —

A. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n n'ayant que des valeurs propres strictement positives. Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, T , telle que $A = {}^t T T$.

B. Montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1 - t^2} dt.$$

Oral 17

A.

1. Soit $M \in GL_3(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe T et T' produit de matrices de transvections d'ordre 3 telles que

$$T M T' = \text{diag}(1, 1, \det(M)).$$

2. En déduire que $GL_n(\mathbf{R})^+$ et $GL_n(\mathbf{R})^-$ sont connexes par arcs.

A' (ÉNS 2024) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et m un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la réduction modulo m définit un morphisme de groupes de $SL_n(\mathbf{Z})$ dans $SL_n(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$. Montrer que ce morphisme est surjectif.

B. (Mines 2023) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{C})$ dérivable en 0. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est intégrable. Soient $(a, b) \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que l'intégrale suivante converge et donner sa valeur.

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx.$$

Oral 18

A. (Mines 2022) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^x) dx$.

B. Soit un entier $n \geq 2$. On dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est cyclique si il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ soit libre.

1. Montrer que le polynôme minimal d'une matrice cyclique est son polynôme caractéristique.
2. Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est ouvert.
3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que M est cyclique si et seulement si les $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ sont deux à deux distincts.
Indication : on pourra considérer la somme des vecteurs d'une base de vecteurs propres.
4. Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.

B' Montrer que M est cyclique si et seulement si $\chi_M = \mu_M$.

Oral 19

A. (Mines 2022)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{C})$. On suppose que pour $k = 1, 2, \dots, n$, $\int_0^1 f(t)t^k dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois.
2. On suppose que pour que $\int_0^1 f(t)t^k dt = 0$, pour tout entier $k \geq 0$. Montrer que f est nulle.

B. Montrer que M est nilpotente si et seulement si 0_n est adhérente à la classe de similitude de M .

B' Déterminer les points de continuité de l'application

$$\phi : M \mapsto \mu_M$$

Oral 20 A. Soit r la rotation de $(\mathbf{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, espace euclidien de dimension 3 orienté, d'axe engendré et dirigé par un vecteur $\vec{w}$ et d'angle de mesure θ . Soit s un élément du groupe orthogonal de $\mathbf{E}$, $O(\mathbf{E})$. Donner la nature de l'endomorphisme $s \circ r \circ s^{-1}$.

A' Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathbf{E}$. Déduire du 1., que l'ensemble des rotations qui ont pour axe soit $\text{vect}(\vec{i})$, soit $\text{vect}(\vec{j})$, soit $\text{vect}(\vec{k})$ engendrent $SO(\mathbf{E})$.

B. (Mines 2022)

Étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) \ln(x)}{x} dx.$$

Oral 21

A. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes.

1. Les valeurs propres de M sont toutes de module strictement inférieur à 1.

2. La série $\sum_{k \geq 0} M^k$ converge.

3. La suite $(M^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers O_n .

A' (Mines 2022) Soit G un compact non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inclus dans $\text{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer que G est un groupe.

B. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = t^3 x.$$

Oral 22

(Centrale 2022)

Les éléments de $\mathbf{R}^n$ seront notés en colonne et $\mathbf{R}^n$ sera muni de sa structure euclidienne canonique ; de plus on oriente $\mathbf{R}^n$ de sorte que sa base canonique soit directe.

Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ désignent respectivement l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles et des matrices antisymétriques réelles d'ordre n . On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par :

$$\Phi : (\mathcal{M}_3(\mathbf{R}))^2 \rightarrow \mathbf{R}; (A, B) \mapsto \text{Tr}(A^T B).$$

1. Justifier que Φ définit bien un produit scalaire et montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Reconnaître la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

Pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note S_M la projection orthogonale de M sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

Soit $A \in \text{SO}_n(\mathbf{R})$.

2. Notons $\text{sp}(S_A)$ le spectre de S_A . Montrer que :

$$\text{sp}(S_A) \subset [-1, 1].$$

Montrer que si n est impaire alors 1 est valeur propre de S_A

Dans le cas $n = 3$, préciser la nature de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à A , lorsque -1 est valeur propre de S_A .

3. Soit B un élément de $\text{SO}_3(\mathbf{R})$ tel que $S_B = S_A$. On suppose que ni A ni B ne sont égales à la matrice identité.

(a) Montrer que pour tout élément T de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$ et tout élément X de $\mathbf{R}^3$,

$$X \perp TX;$$

(b) Montrer que les endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associés à A et B sont des rotations de même axe.

Comparer une mesure de leurs angles.

Oral 23 CENTRALE PYTHON

Soit g une application de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant les conditions suivantes :

- $g(1) = 0$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) = 0$;
- pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $g(t+1) - g(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

1. Déterminer g' sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

On pourra considérer $g'(t+1) - g'(t)$.

2. Déterminer g sous la forme d'une série de fonctions.

3. Soit $(z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de complexes définie par récurrence par :

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}^*, z_{n+1} = z_n + i \frac{z_n}{|z_n|}. \end{cases}$$

Montrer que cette suite est bien définie.

4. Calculer les dix premiers termes de la suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

5. Tracez $z_1, \dots, z_{10}$ dans le plan complexe et, sur la même figure l'arc paramétré

$$\gamma : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}; t \mapsto \left(\sqrt{t} \cos(g(t)), \sqrt{t} \sin(g(t)) \right).$$

6. Formuler une conjecture puis la démontrer.

7. Trouver un équivalent de $g(n)$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Oral 24 CENTRALE PYTHON

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on considère les fonctions de la variable réelle x suivantes :

$$f_n(x) = \prod_{i=0}^n \frac{1}{x+i}; F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}; G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

1. Montrer que F et G sont bien définies sur $\mathbf{R}_+^*$.

2. Tracez les graphes de F et G pour des intervalles raisonnables de x . Représentez ensuite celui de F/G . Que peut-on conjecturer ?

3. (a) Justifier l'existence d'une famille de réels $(\alpha_{i,n})_{(i,n) \in \mathbf{N}^2}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\alpha_{i,n}}{x+i}.$$

À l'aide d'équivalents au voisinage des points $-i$, exprimer les coefficients $\alpha_{i,n}$.

(b) Prouver la conjecture faite à la question précédente.