Probabilités- révisions de MPSI

Laurent BERNIS

12 avril 2024

Exercices élémentaires

Exercice 1 —
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A et B des événements tels que $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{3}{4}$ montrer que :

$$\frac{1}{2} \leq \mathbf{P}(A \cap B) \leq \frac{3}{4}.$$

Exercice 2 — Soit Ω un ensemble fini de cardinal premier. On le munit de la probabilité uniforme. A quelle condition deux événements A et B, peuvent-ils être indépendants.

Exercice 3 —

1. En filière MP il y a 30% de $\frac{5}{2}$ et donc 70 % de $\frac{3}{2}$. Le taux de réussite dans une école est de 60% pour les $\frac{3}{2}$ et de 90 % pour les $\frac{5}{2}$.
   Quelle est la probabilité pour qu'un élève ayant réussi le concours d'entrée à cette école soit un $\frac{3}{2}$?
2. On admet que le taux d'intégration de l'école est le même parmis les $\frac{3}{2}$ reçus et les $\frac{5}{2}$ reçus. Le taux de redoublement de la première année est de 6 % chez les $\frac{3}{2}$ et de 8% chez les $\frac{5}{2}$. Quelle est le probabilité qu'un redoublant soit un $\frac{5}{2}$?
3. En filière MP il y a 30% de $\frac{5}{2}$ et donc 70 % de $\frac{3}{2}$. Le taux de réussite dans une école est de 60% pour les $\frac{3}{2}$ et de 90 % pour les $\frac{5}{2}$.
   Quelle est la probabilité pour qu'un élève ayant réussi le concours d'entrée à cette école soit un $\frac{3}{2}$?
4. On admet que le taux d'intégration de l'école est le même parmis les $\frac{3}{2}$ reçus et les $\frac{5}{2}$ reçus. Le taux de redoublement de la première année est de 6 % chez les $\frac{3}{2}$ et de 8% chez les $\frac{5}{2}$. Quelle est le probabilité qu'un redoublant soit un $\frac{5}{2}$?

voir aussi l'exercice 17

Exercice 4 — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - (n-1) \leq \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \leq \min_{i=1,\ldots,n} \mathbf{P}(A_i).$$

Exercice 5 — Formule du crible de Poincaré — $\star$

1. Soient U, V et W trois ensembles finis, montrer que :

$$|U \cup V \cup W| = |U| + |V| + |W| - |U \cap V| - |U \cap W| - |V \cap W| + |U \cap V \cap W|.$$

2. Plus généralement, soient $V_1, V_2, \ldots, VU_k$ des ensembles finis. Montrer que :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{j\in I} V_j\right|.$$

Exercice 6 — Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On effectue un tirage exhaustif sans remise. On s'intéresse à l'événement : « la première boule blanche sortie de l'urne est la t^{e} »

1. Pour modéliser cette expérience aléatoire on prend pour univers $\Omega_1 = \mathrm{S}_{n+b}$, muni de la probabilté uniforme. Déterminer la probabilité de l'événement considéré.
2. Pour modéliser cette expérience aléatoire on prend pour univers Ω_2 l'ensemble des mots à $n+p$ lettres sur l'alphabet $\{B, N\}$ qui ont b et seulement b lettres B. Déterminer la probabilité de l'événement considéré.

Rep. 1. $\frac{n(n-1)\ldots(n-t+2)\times b}{(n+b)(n+b-1)\ldots(n+b-t+1)}$. 2. $\dfrac{\dbinom{n+b-t}{b-1}}{\dbinom{n+b}{b}}$.

Exercice 7 — On se donne n urnes dans lesquelles on dispose au hasard m boules.

1. On modélise le problème en prenant pour univers $\{1, \ldots, n\}^{\{1,\ldots,m\}}$ muni de la probabilité $\mathbf{P}$ uniforme. Soit k un élément de $\{1, \ldots, m\}$. Quel est la probabilité $p_{m,n}$ de l'événement « la première urne contienne k boules » ?
2. Retrouver ce résultat en modélisant le problème par une suite de m variables de Bernoulli indépendantes.
3. Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i\to+\infty}{\sim} ci$. Montrer que $p_{m_i,i}$ tend vers $e^{-c}\frac{c^k}{k!}$, lorsque i tend vers $+\infty$.
4. Déterminer la probabilité $q_{m,n}$ de l'événement « Chaque urne contient au plus une boule ». Montrer que $q_{m,i}$ tend vers 1 lorsque i tend vers $+\infty$.
   Soit c un entier naturel et une suite d'entier naturels $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $m_i \underset{i\to+\infty}{\sim} c\sqrt{i}$. Montrer que
   $$q_{m_i,i} \underset{i\to+\infty}{\to} \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right).$$
   Rep. $q_{m,n} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{n^m}$.
5. Etant donnée une classe d'élèves nés tous une même année non bisextile, déterminer l'effectif minimum de la classe pour que la probabilité que deux élèves soient nés le même jour soit supérieure à $\frac{1}{2}$.
   Rep. 23.
6. Déterminer la probabilité $P'_{m,n}$ pour que la première urne contienne au moins une boule.
   Rep. $p'_{m,n} = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$
7. Etant donné un élève de la classe, quel est l'effectif minimum de la classe pour que la probabilité qu'un autre élèves soit né le même jour soit supérieure à $\frac{1}{2}$.
   Rep. 254.

Exercice 8 — Dés pipés — Peut on piper deux dés de sorte que la somme des résultats qu'ils donnent suite à un lancé suive une loi uniforme ?

Une preuve une utilisant les polynômes générateurs est proposé en fin de l'exercice 20

Exercice 9 — THÉORÈME DE HARDY-WEINBERG (1908) —

Chez un organismes diploïdes les caractères héréditaires sont portés par des paire de gènes, un gène pouvant prendre deux formes (ou allèles), notés A et B Chaque parent transmet à un descendant commun un de ses deux gènes, de façon équiprobable, l'un indépendamment de l'autre. Les génotypes possibles sont AA, AB, BB.

Partons d'une génération chez laquelle les génotypes AA, AB et BB ont des probabilités respectives x, $2y$ et z, donc $x + 2y + z = 1$.

1. Déterminer les probabilités de ces génotypes chez la génération suivante.
2. Montrer qu'à partir de la deuxième génération les probabilités de ces génotypes sont constantes.

Exercice 10 — Soient m et n des entiers tels que $0 < m \leq n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

1. On tire sans remise m boules. Donner la loi du plus petit numéro.
2. Reprendre le problème précédent en considérant un tirage avec remise.

Indication : On pourra calculer la probabilité que le plus petit numéro soit strictement supérieur à k.

Exercice 11 — Des joueurs $A_0, A_1, ...A_n, ...$ se présentent à un tournoi de *pile* ou *face*, disputé avec une pièce équilibré suivant les modalités suivantes :

— les joueurs A_0 et A_1 s'affrontent lors de la première partie. L'un deux lance la pièce si le résultat est *pile* le joueur A_0 a gagné et A_1 est éliminé. sinon le joueur A_1 a gagné et A_0 est éliminé. Le gagnant affronte suivant les mêmes modalité le joueur A_2 et ainsi de suite ;

— est déclaré vainqueur du tournoi tout joueur qui le premier remporte trois parties sucessives ;

— lorsque un joueur est vainqueur le tournoi prend fin.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on note q_n la probabilité que A_n participe au tournoi, et p_n celle qu'il l'emporte.

1. Exprimer pour tout $n \in \mathbf{N}$, p_n en fonction de q_n.
2. Calculer q_n et p_n pour tout élément n de $\{1, 2, 3\}$.
3. Pour tout entier $n \geq 4$ déterminer une relation de récurrence linéaire entre q_n, q_{n-1} et q_{n-2}.
4. Déduire de la question précédent la limite de q_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   (5/2) En déduire que le tournoi s'achève presque sûrement.

Variables aléatoires

Exercice 12 — On dispose d'un dé équilibré comportant six faces dont trois faces comportent le numéro 0, deux faces comportent le numéro 1 et une face comporte le numéro 2.

1. EXPÉRIENCE N° 1.
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On lance n fois, successivement et indépendamment, le dé et on note X_n le nombre de fois que l'on a obtenu 1 durant les n lancers, et on note Y_n le nombre de fois que l'on a obtenu 2.
   (a) Donner la loi de X_n, et la loi de Y_n.
   (b) Donner la loi de $X_n + Y_n$.
   (c) Déterminer la covariance du couple (X_n, Y_n).

(d) Les variables X_n et Y_n sont-elles indépendantes ? Expliquer pourquoi on pouvait sy attendre.

2. Expérience n° 2.

On lance successivement et indépendamment le dé en question jusqu'à lobtention d'un numéro non nul. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués dans cette expérience et on note T la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du dernier lancer.

(a) Donner la loi de N. Préciser son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la loi du couple (T, N) puis donner la loi de T.

(c) Les variables N et T sont-elles indépendante ? .

Exercice 13 — Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un univers fini Ω. Soit A un élément de $X(\Omega)$. Montrer :

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \mathrm{E}(\mathbf{1}_{\{X \in A\}}).$$

Exercice 14 — Inégalité de Cauchy & Schwarz —
Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs réelles définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$ de variance nulle. Montrer que Z prend une valeur avec la probabilité 1.
2. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs réelles définies sur $(\Omega\mathbf{P})$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathrm{cov(X, Y)}| \leq \sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}.$$

Pour tout événement C, on définit $\mathbf{1}_E$ la variable aléatoirea à valeurs réelles définie sur Ω par :

$$\mathbf{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in C, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. (a) Soit C un événement. Déterminer l'espérance de $\mathbf{1}_C$.

(b) Soient A et B des événements. Déterminer le produit $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

(c) Montrer que $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.
Indication On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy & Schwarz à $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.

4. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega(P))$ à valeur dans $\mathbf{N}$ et d'espérance strictement positive. Montrer que :

$$\mathrm{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}.$$

Indication. Utiliser l'inégalité de Cauchy & Schwarz .

Exercice 15 — Soit X une variable aléatoire définie sur un même univers (fini) Ω, à valeurs dans $\{0, ..., n\}$.
Montrer que l'espérance de X est donné par la formule

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X \geq i).$$

Ce type de formule qui sera généralisée cette année est très utile (voir exercice (24)).

Exercice 16 — Soient X_1, X_2,...,X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi, définies sur un même univers fini Ω, et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\{1, ..., n\}$ telle que $X_1, ..., X_n, T$ soient mutuellement indépendante.

On définit alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + ... + X_T$.

1. Montrer que $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.
2. Donner une formule analogue pour $\mathrm{V}(S)$.

On pourra commparer à l'exercice sur les polynômes générateurs.

Exercice 17 —

1. Une urne U contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p ($p \in]0, 1[$). On effectue dans cette urne N tirages avec remise. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boule blanches obtenu. Donner la loi de X son espérance et sa variance.
2. On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de même apparence. Pour $i = 1; 2$, la proportion de boules blanches dans l'urne U_i est p_i ($p_i \in]0, 1[$). On choisit au hasard une des deux urne (avec même probabilité) et sans savoir de quelle urne il s'agit on tire N boules avec remise. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boule blanches piuochées.

   On étudie comment Y peut donner une indication sur le numéro de l'urne choisie.

   (a) On prend $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$ et $N = 12$. Trouver les valeur de Y qui permettent de dire que c'est, avec une probabilité d'au moins $0,8$, l'urne U_1 qui a été choisie.

   (b) **Pour $\frac{5}{2}$.** On suppose que N est très grand ($N > 1000$) et que $p_1 = \frac{8}{N}$, $p_2 = \frac{4}{n}$. Même question.

Exercice 18 —

Un joueur lance N fois une pièce de monnaie. Les lancers sont indépendants. On note X_N le nombre de *pile* obtenu.

1. La pièce est truquée, elle donne *pile* avec la probabilité p ($p \in]0, 1[$). Donner la loi de X_n.
2. Le joeur utilise maintenant deux pièces M_1 et M_2, truquée : pour $i = 1, 2$, la probabilité que M_i face *pile* est p_i ($p_i \in]0, 1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$). Le jeux se déroule ainsi :
   — Le premier lancer se fait avec M_1 ;
   — Pour tout entier $n \geq 2$, le n^{e} lancer se fait avec M_1, s'il a obtenu *pile* au $(n-1)^{\text{e}}$, avec M_2 sinon.

   Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, S_n l'événement « obtenir *pile* au n^{e} lancer » et F_n l'événement « obtenir *face* au n^{e} lancer ». Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on note U_n l'élément de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(S_n) \\ \mathbf{P}(F_n) \end{pmatrix}$$

   (a) Trouvre une relation entre U_n et U_{n-1} et montrer que U_n converge vers une limite L à déterminer.

   (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n désigne le nombre de *pile* obtenus à l'issue du n^{e} lancer. Donner un équivalent de $\mathrm{E}(X_n)$, lorsqe n tend vers $+\infty$, on utilisera le théorème de Cesàro.

Exercice 19 — Le groupe symétrique d'indice n est muni de l'équiprobabilité notée sans imagination $\mathbf{P}$. On se propose de calculer la probabilité de l'ensemble des dérangements, rappelons qu'un dérangement n'est rien de plus qu'une permutation sans point fixe.

1. Soit pour $i = 1, \dots, n$, A_i l'ensemble des permutations fixant i. Soient $i_1, i_2, \dots, i_j$, j éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$. Montrer que
$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \frac{(n-j)!}{n!}.$$
2. En déduire en utilisant la formule du crible (cf. exercice 4) que la probabilité de l'ensemble des dérangements est
$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}.$$
3. Notons pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, D_k le nombre de dérangements d'un ensemble à k éléments. Exprimer au moyen de divers nombres de dérangements, la loi de la variable X_n définie sur S_n qui associe à un élément de S_n le nombre de ses points fixes.
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X_m = k) \underset{m \to +\infty}{\to} \frac{e^{-1}}{k!}$, (loi de Poisson de paramètre 1).

Exercice 20 —

On munit le groupe symétrique d'indice n de la probabilité uniforme. On définit sur Ω la variable aléatoire X qui à une permutation associe son nombre de points fixes. On cherche l'espérance de X.

1. On considère pour $j = 1, \dots, n$, la variable aléatoire X_j qui est la fonction caractéristique de l'ensemble des éléments de S_n qui admettent j comme point fixe. Montrer que X_j suit une loi de Bernoulli de paramètre à préciser.
2. Déduire de la précédente question l'espérance de X.

   On comparera à l'exercice de colles utilisant les matrices de permurtations.
3. Calculer la variance de X_i, pour $i = 1, 2, .., n$ et la covariance de X_i et X_j, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, ..., n\}$. En déduire la variance de X.

Exercice 21 —

Par n on désigne un entier ≥ 2. On considère une chaîne de n individus A_1, A_2,. . .A_n. Initialement A_1 détient une information de type binaire (« vraie »ou « faux »). Pour $k = 1, \dots, n-1$, A_k transmet une information de type binaire (« vraie » ou « faux ») à A_{k+1}. On suppose que la probabilité que A_k transmette à A_{k+1} l'information qu'il détient pour $k = 1$, ou qu'il a reçue de son prédécesseur pour $k \geq 2$, est p, (donc la probabilité qu'il transmette l'information contraire est $1 - p$). Chaque transmission est indépendante de la précédente. On s'intéresse à la probabilité p_n que qu A_n reçoive l'information initialement détenue par A_1.

1. Première méthode —
   (a) Justifier la formule $p_k = p_{k-1}p + (1 - p_{k-1})(1 - p)$, pour tout entier $k \geq 2$.
   (b) En déduire p_n.
2. Seconde méthode —
   (a) Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Donner la probabilité pour que exactement k transmissions aient été fausses. Quelle loi suit cette probabilité ?
   (b) En exprimant p_n comme une somme déterminer p_n.
3. Etudier la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 22 —
Deux enceintes E_1 et E_2 contiennent à elles deux, une mole de paradichlorobenzène. On les met en communication à l'instant t_0. A chacun des instants $t_1, t_2, ...t_n...$ régulièrement espacés, une molécule de gaz change d'enceinte, chaque molécule ayant la même probabilité d'être celle concernée par le changement. On note pour tout entier naturel i, X_i la variable aléatoire « nombre de molécules dans l'enceinte E_1 au temps t_i » et l'on pose $Y_i = X_{i+1} - X_i$.

1. En considérant Y_n déterminer l'espérance de X_n, pour tout entier $n \geq 0$, en fonction de celle de X_0.
2. Calculer la limite de $\mathrm{E}(X_n)$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 23 —
On considère une urne contenant a boules noirs et b boules blanches. Après chaque tirage la boule extraite et remise dans l'urne avec c boules de sa couleur. Déterminer la probabilité $p_n(a, b)$ que la n^{e} boule tirée soit blanche.
Indication — On vérifie que $p_n(a, b)$ prend pour $n = 1$ et $n = 2$ la même valeur $\frac{b}{a+b}$, on montre par récurrence que $(p_n(a, b))_{n\in\mathbf{N}}$ est constante grâce à la formule

$$p_{n+1}(a, b) = p_1(a, b)p_n(a, b + c) + (1 - p_1(a, b))p_n(a + c, b)...$$

Exercice 24 — Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes définies sur un univers fini Ω et qui suivent la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soient les variables aléatoires :

$$Z = |X - Y|\,;\; T = \min\{X, Y\}.$$

1. Calculer $\mathrm{E}(Z)$ sans calculer la loi de Z et en donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.
   On rappelle que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. En déduire $\mathrm{E}(T)$.
3. Calculer $\mathbf{P}(T \geq n)$, en déduire $\mathrm{E}(T)$.

Exercice 25 — Polynômes générateurs —

$(\Omega, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé fini. Nous désignerons l'indéterminée de l'ensemble de polynômes à coefficients réels par T pour laisser libre la lettre X de désigner une variable aléatoire, autrement dit T est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls, exception faite de celui de degré 1 qui vaut 1 : $T = (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbf{N}$. On appelle polynôme générateur de X l'élément de $\mathbf{R}[T]$ noté G_X, suivant.

$$G_X = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(X = n)T^n.$$

On notera que Ω étant fini, la suite $(\mathbf{P}(X = n))_{n\in\mathbf{N}}$ est presque nulle et G_X est donc bien défini, par une somme finie.

1. Exemples — Soit un élément p de $]0, 1[$ et m un entier naturel non nul. Donner une expression sans le signe somme de G_X dans le cas où la variable aléatoire suit une loi :
   i. de Bernoulli de paramètre p : $X \sim \mathcal{B}(p)$;
   ii. binomiale de paramètre (m, p) : $X \sim \mathcal{B}(m, p)$;
   ii. uniforme sur $\{1, \ldots, m\}$: $X \sim \mathcal{U}(\{1, \ldots, m\})$.

2. Pour tout entier $n \geq 0$ donner l'expression de $\mathbf{P}(X = n)$ en fonctions des dérivées successives de G_X évaluées en 0.
3. Montrer que $\mathrm{E}(X)$, l'espérance de X est donnée par :

$$\mathrm{E}(X) = G'_X(1).$$

4. Donner l'expression de la variance de X au moyen des dérivées première et deuxième de G_X évaluées en 1.
5. En utilisant les deux questions précédentes, retrouver l'espérance et la variance de X dans les deux cas : $X \sim \mathcal{B}(p), X \sim \mathcal{B}(m,p)$ de la première question.
6. Soit Y une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$ et indépendante de X. Montrer que : $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
7. On suppose que X et Y suivent des lois binomiales de pramètres respectifs (m,p) et (m',p). Déterminer en utilisant les polynômes générateurs la loi de $X+Y$.
   Déterminer directement la loi de $X+Y$.
8. On suppose que X suit une loi binomiale de paramètre (m,p) et que $X = X_1 + X_2$ où X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}$. Déterminer les lois de X_1 et de X_2.
9. On se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ et de même loi. Pour tout entier n, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, avec la convention habituelle sur les sommes $S_0 = 0$. Soit alors N une variable aléatoire à valeur dans $\mathbf{N}$ telle que les X_n et N soient mutuellement indépendantes. On définit enfin sur Ω la variable aléatoire $S = S_N$.
   (a) Pour tout entier $k \geq 0$, montrer que

   $$G_{S_k} = (G_{X_1})^k.$$

   (b) Montrer que $G_S = G_T \circ G_{X_1}$.
   (c) En déduire que $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(T)\mathrm{E}(X_1)$.
   (d) Donner une égalité similaire pour $\mathrm{V}(S)$.
10. En utilisant les polynôme générateur, montrer qu'il n'est pas possible de piper deux dés de sorte que la somme de leur score suive une loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.

Exercice 26 —
Dans tout l'exercice p désigne un élément de $[0,1]$.

1. Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 des variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes et également distribuées selon une loi de Bernoulli de pramètre p. On note X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ X_2 & X_4 \end{pmatrix}$$

   (a) Combien de valeurs peut prendre la variable X ?
   (b) Quelle est la probabilité $\mathbf{P}_X(\{O_2\})$, que X ait pour valeur la matrice nulle ?
2. On veut calculer la probabilité $\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$, que la valeur de X soit inversible.
   (a) Calculer $\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$ dans les deux cas suivant :
   — $p = 0$,

— $p = 1$.

(b) Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 des éléments de $\{0, 1\}$. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 si et seulement si aucune de ses colonnes n'est nulle et que ses deux colonnes sont distinctes.

(c) En déduire que $\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = 2p^2(1 - p^2)$.

(d) Montrer que $\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) \leq \min\left\{p, \frac{1}{2}\right\}$.

3. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires réelles également distribuées selon une loi de Bernoulli de pramètre p et mutuellement indépendantes, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 1$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables mutuellement indépendantes. Pour tout entier $k \geq 1$, on note Y_k la variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,

$$Y_k = \begin{pmatrix} X_{4(k-1)+1} & X_{4(k-1)+3} \\ X_{4(k-1)+2} & X_{4(k-1)+4} \end{pmatrix}.$$

Ainsi par exemple, Y_1 désigne-t-elle la variable X, Y_2 la variable $\begin{pmatrix} X_5 & X_7 \\ X_6 & X_8 \end{pmatrix}$.

(a) Donner pour tout entier $n \geq 1$, la probabilité pour que le produit $Y_1Y_2 \ldots Y_n$ ait une valeur inversible : $\mathbf{P}_{Y_1Y_2\ldots Y_n}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$.

(b) Montrer que $\mathbf{P}_{Y_1Y_2\ldots Y_n}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$ tend lorque n tend vers $+\infty$, vers une limite à préciser.

4. Soit une entier $n \geq 1$ et une famille de n^2 variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes et également distribuées selon une loi de Bernoulli de pramètre p, indicée par $\{1, \ldots, n\}^2$,

$$(X_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}.$$

On dispose ainsi d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$Z = (X_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}.$$

(a) On considère la variable aléatoire $T = \mathrm{tr(Z)}$. Quelle est la loi de la variable T ? Donner son espérance et sa variance.

(b) On note P la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Décrire les matrices PA et AP au moyen des lignes et des colonnes de A.

(c) On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des valeurs de Z, montrer que pour tout élément B de $\mathcal{E}$, BP est élément de $\mathcal{E}$ et que l'application

$$\phi \;:\; \mathcal{E} \to \mathcal{E}\;;\; B \mapsto BP$$

est une bijection.

(d) Comparer pour tout élément B de $\mathcal{E}$, $\mathbf{P}_Z(B)$ et $\mathbf{P}_Z(BP)$.

(e) Déduire des sous-questions précédentes l'espérance de la variable aléatoire réelle $\det(Z)$.

Exercice 27 —

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi Binomiale de paramètre p, $(0 < p < 1)$. Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $Y_n = U_n U_{n+1}$.

1. Soit (n, m) un couple d'éléments distincts de $\mathbf{N}$. Donner la loi de Y_n et de $Y_n Y_m$.
   Indication : On distinguera les cas $|n-m| > 1$, $m = n+1$ et $n = m+1$.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoires $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.
3. Montrer que $\mathrm{V}(S_n) = np^2(1-p)\left(1 + \left(3 - \frac{2}{n}\right)p\right)$
4. Montrer que $\mathrm{V}(S_n) \leq \frac{3}{4}np^2$.
   En déduire un entier $N > 0$, tel que si $n \geq N$ alors $\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [0,15; 0,35]\right) \geq 0,9$

Exercice 28 —

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables de Randmacher mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Une variable est dite de Randmacher si elle prend les valeurs 1 et -1 avec la même probabilité $\frac{1}{2}$.

Soient par ailleurs $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels et S_n la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i.$$

On pourra utiliser le résultat :
si pour $i \in \{1, \dots, n\}$, f_i est une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, alors $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. Calculer l'espérance de S_n et son écart type noté σ_n.
2. Montrer que pour tout réel t, $\mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
   En déduire que pour tout réel λ,
   $$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda S_n}\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2 \sigma_n^2}{2}\right).$$
3. Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$, et tout entier $q \geq 1$,
   $$\mathrm{E}\left(S_n^{2q}\right) \leq 2\frac{(2q)!}{\lambda^{2q}} \exp\left(\frac{\lambda^2 \sigma_n^2}{2}\right).$$
4. Montrer que pour tout entier $q \geq 1$,
   $$\mathrm{E}\left(S_n^{2q}\right) \leq 2\frac{(2q)!\mathrm{e}^q}{2^q q^q} \sigma_n^{2q}.$$
   En déduire que tout entier $q \geq 1$,
   $$\mathrm{E}\left(S_n^{2q}\right)^{\frac{1}{2q}} \leq \sqrt{2\mathrm{e}q}\,\sigma_n.$$

Exercice 29 —

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et qui toutes suivent la loi de Rademacher, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. On note, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on convient que S_0 est la variable aléatoire presque sûrement nulle. On considère par ailleurs la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$,

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n=0}.$$

On rappelle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{S_n=0} = \begin{cases} 1 \text{ si } S_n(\omega) = 0, \\ 0 \text{ sinon }. \end{cases}$

On admet le théorème suivant :

Lemme de coalition *Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\mathbf{N}^*$ toute application f de $\mathbf{R}^i$ dans $\mathbf{R}$, toute application g de $\mathbf{R}^j$ dans $\mathbf{R}$, les variables aléatoires*

$$f(X_1, X_2, ..., X_i) \text{ et } g(X_{i+1}, X_{i+2}, ..., X_{i+j})$$

sont indépendantes.

1. Que représente la variable aléatoire N ? Exprimer l'événement $\{N \neq 0\}$ au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.
   Exprimer l'événement $\{N = +\infty\}$ au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.
2. Montrer que :
$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + ...X_k \neq 0).$$
3. On admet que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge. Déterminer $\mathbf{P}(N = +\infty)$.
4. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge.

Indications pour l'exercice 29

1. N représente le nombre (éventuellement infini) de termes nuls de la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
$$\{N \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \{S_k = 0\}.$$
$$\{N = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \bigcup_{k\geq n} \{S_k = 0\}.$$
2.
$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ...X_{n+k} \neq 0).$$
   Puis comme le lemme de coalition assure l'indépendance de S_n et $X_{n+1} + X_{n+2} + ...X_{n+k}$,
$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0), \mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ...X_{n+k} \neq 0).$$
   Mais les X_n étant mutuellement indépendantes et de même loi
$$\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ...X_{n+k} \neq 0) = \mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + ...X_k \neq 0),$$
   quantité indépendante de n, joliment noté α.

3. On a donc :
$$\mathbf{P}(N<+\infty)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha\mathbf{P}(S_n=0),$$
La série $\sum\mathbf{P}(S_n=0)$, on l'admet, diverge, donc nécessairement $\alpha=0$ et donc on a $\mathbf{P}(N<+\infty)=0$. Donc :
$$\mathbf{P}(N=+\infty)=1.$$

4. Posons pour tout $\in\mathbf{N}^*$, $X_n^*=\frac{X_n+1}{2}$, et $S_n^*=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k^*$ et $S_0^*=S_0$. Deux choses, d'abord les X_n^* suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et sont mutuellement indépendantes de sorte que $S_n^*\sim\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$, ensuite $S_n^*=\frac{S_n+n}{2}$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$. Donc, pour tout $p\in\mathbf{N}$, $\mathbf{P}(S_{2p+1}=0)$ est nulle tandis que $\mathbf{P}(S_{2p}=0)=\mathbf{P}(S_{2p}^*=p)=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\underset{p\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\pi p}}$ (merci Stirling).
La divergence de la série est acquise.

Utilisation des probabilité en géométrie et arithmétique

Exercice 30 — $\star$ Un (autre) lemme de Sperner —
Par n on désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Pour tout entier $n\geq 1$, E_n désigne l'ensemble $\{1,...,n\}$. On appelle *antichaîne* de $\mathbf{E}_n$ toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E_n)$ telle que pour tout couple (A,B) d'éléments distincts de $\mathcal{A}$, A n'est pas inclus dans B.

1. Soit $k\in\{1,..,n\}$. Déterminer une antichaîne de cardinal $\binom{n}{k}$. Pour quelle valeur de k est-elle de cardinal maximum ?
2. On se propose de montrer le résultat suivant (Sperner 1928, preuve probabiliste de Lubell 1966) :
   Le cardinal d'une antichaîne de E_n est au plus $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$
   (a) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E_n)$. On munit S_n de la probabilité $\mathbf{P}$ uniforme. Pour tout $\sigma\in S_n$ on considère la chaîne C_σ :
   $$C_\sigma=\Big\{\emptyset,\{\sigma(1)\};\{\sigma(1),\sigma(2)\},....,\{\sigma(1),\sigma(2),...\sigma(n)\}\Big\}.$$
   On définit sur S_n la variable aléatoire X qui à un élément σ de S_n associe le cardinal de $C_\sigma\cap\mathcal{A}$ et pour tout A de $\mathcal{A}$, X_A est la variable aléatoire indicatrice de l'événement $A\in C_\sigma$.
   Déterminer pour tout élément de $\mathcal{A}$ la loi de X_A et son espérance.
   (b) Exprimer X en fonction des X_A, $A\in\mathcal{A}$. En déduire le lemme de Sperner.

Exercice 31 —
Soit un espace euclidien $(\mathbf{E},\langle\cdot|\cdot\rangle)$ de dimension non nulle n.

1. Soient $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_p$ des vecteurs de $\mathbf{E}$ unitaires.
   Nous nous propososons de montrer qu'il existe des éléments $\varepsilon_1,\ldots\varepsilon_p$ de $\{-1,1\}$ tels que :
   $$\left\|\sum_{i=1}^{p}\varepsilon_i\vec{v}_i\right\|\leq\sqrt{p}$$

Soient $X_1, X_2, \dots, X_p$ p variables de Rademacher[1] indépendantes. On pose R la variable aléatoire

$$R = \left\| \sum_{i=1}^{p} X_i \vec{v}_i \right\|^2$$

En étudiant l'espérance de R conclure.

2. On considère à présent $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p$ des vecteurs de $\mathbf{E}$ de norme inférieur ou égale à 1. Soient $q_1, \dots, q_p$ des éléments de $[0, 1]$, on pose

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{p} q_i \vec{u}_i.$$

$\vec{v}$ est un vecteur du parallélépipède $\mathcal{P}$ construit sur les $\vec{v}_i$, du moins lorsque $n \geq p$. Pour tout partie I de $\{1, \dots, p\}$, on pose

$$\vec{v}_I = \sum_{i \in I} \vec{u}_i,$$

les $\vec{v}_I$ sont les sommets du paraléllépipède $\mathcal{P}$.

Nous allons montrer : *il existe un sommet de $\mathcal{P}$ distant de $\vec{v}$ de moins de $\frac{\sqrt{n}}{2}$.*

On considère p variables de Bernoulli $X_1, \dots, X_p$ indépendantes et la variable aléatoire

$$S = \left\| \sum_{i=1}^{p} X_i \vec{u}_i - \vec{v} \right\|^2$$

En choisissant astucieusement le paramètre de chaque variable X_i, $i = 1, \dots, p$, conclure.

Exercice 32 — Grands ensembles de vecteurs presque orthogonaux —

Soit un entier $m \geq 1$. R^m sera dans la suite muni de sa structure euclidienne canonique, $\langle \cdot | \cdot \rangle)$ désignera le produit scalaire canonique, $\| \cdot \|$ la norme associée. On admettra qu'il existe une notion de volume sur $\mathbf{R}^m$ semblable à celle en domension 3 et que le volume d'une sphère et proportionnel à la puissance m^{e} de son rayon.

Par S^{m-1} on désigne la sphère unité de $\mathbf{E}$. Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de S^{m-1} nous appellerons paramètre de cohérence de la famille que nous noterons $C(u)$ le nombre réel :

$$C(u) = \sup\{ |\langle \vec{u}_i | \vec{u}_j \rangle| \, ; \ (i, j) \in I^2, i \neq j \}.$$

1. Justifier que le paramètre de cohérence de u est bien défini
2. Que dire d'une famille V à valeur dans S^{m-1} de paramètre de cohérence nul. Montrer qu'une telle famille est finie.
3. Soit ε un élément de $]0, 1[$. On supose que $C(u) \leq \varepsilon$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif R tel que pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de I, les boules de rayon R et de centre u_i et u_j soient disjointes.
   (b) Montrer que I est fini et que

$$|I| \leq \left(1 + \sqrt{\frac{2}{1 - \varepsilon}} \right)^m.$$

1. Une variable de Rademacher est une variable qui prend la valeur -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, elle modélise par exemple un jeu de pile ou face équitable ou le joueur empoche deux fois la mise s'il gagne et dans tous les cas laisse sa mise.

On appelle vecteur de Rademacher à valeur dans S^{n-1} tout vecteur aléatoire X, de $\mathbf{R}^m$ de la forme

$$X = \frac{1}{\sqrt{m}}(X_1, X_2, ..., X_m),$$

dont les composante $X_1, ...X_m$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Rademacher :

$$\text{pour } i = 1, \ldots, ...m,\ \mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \tfrac{1}{2}$$

4. Soient $X = \frac{1}{\sqrt{m}}(X_1, X_2, ..., X_m)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{m}}(Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ des vecteurs de Rademacher indépendants.
   (a) Montrer que pour tout réel t, $\mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$
   (b) Montrer que pour tout réel t,
   $$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) = \left(\mathrm{ch}\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m$$
   (c) Montrer que
   $$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) = \mathrm{ch}\left(\frac{t^2}{2m}\right)$$
5. Soient σ et λ des éléments de $\mathbf{R}_+^*$ et Z une variable aléatoire réelle telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$,
   $$\mathrm{E}(\exp(tZ) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$
   Alors :
   $$\mathbf{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$
6. (a) Montrer que $\mathbf{P}\left(|\langle X|Y\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right)$.
   (b) Soient $X^1, X^2, \ldots, X^N$ des vecteurs de Randemacher à valeurs dans S^{m-1} mutuellement indépendants. Déduire de la sous question précédente que :
   $$\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < N^2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right).$$
7. On suppose que $\delta \in]0, 1]$ et $m \geq 2\frac{\ln(N^2/\delta)}{\varepsilon^2}$. Majorer $\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$.
8. Soit $N = \left\lfloor \exp\left(\frac{\varepsilon^2 m}{4}\right)\right\rfloor$ Montrer qu'il existe une famille w de vecteur de S^{m-1} de cardinal N dont le paramètre de cohérence est majorée par ε.

Exercice 33 —
Indicatrice d'Euler —

On se propose de retrouver, par une méthode probabiliste le résultat du cours sur l'indicatrice d'Euler suivant :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, dont la décomposition en nombres premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont k nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, des éléments de $\mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

On munit $\{1, \ldots, n\}$ de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$.

1. Soit d un diviseur de n et A_d l'événement $\{k \in \{1, \dots, n\}, d|k\}$. Déterminer $\mathbf{P}(A_d)$
2. Soit $d_1, d_2, \dots, d_h$ des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux. Montrer que les événements $A_{d_1}, A_{d_2}, \dots, A_{d_h}$ sont mutuellement indépendants.
3. Conclure.

Exercice 34 — $\star$ On s'intéresse à la probabilité pour que deux entiers pris au hasard dans $\{1, \dots, n\}$ soient premiers entre eux. Par n on désigne un entier non nul. L'ensemble $\{1, \dots, n\}^2$ est muni de la probabilité uniforme noté $\mathbf{P}$. On s'intéresse à la probabilité r_n de l'événement

$$A = \{(a, b) \in \{1, \dots, n\}^2, a \wedge b = 1\}.$$

Soient $p_1, p_2, \dots, p_k$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Pour $i = 1, \dots, k$, U_i désigne l'ensemble des couples (a, b) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ divisibles l'un et l'autre par p_i.

On défini par ailleurs la fonction μ de Möbius, application de $\mathbf{N}^*$ dans $\{0, 1\}$ définie ainsi :

— $\mu(1) = 1$,

— pour tout entier $n \geq 2$ de décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, où les α_i, $i = 1 \dots k$ sont non nuls $\mu(n)$ vaut zéro si l'un des α_i est supérieure ou égal à 2 et $\mu_n = (-1)^k$ si tous les α_i sont égaux à 1.

1. Formule du crible de Poincaré —
   (a) Soient U, V et W trois ensembles finis, montrer que :
   $$|U \cup V \cup W| = |U| + |V| + |W| - |U \cap V| - |U \cap W| - |V \cap W| + |U \cap V \cap W|.$$
   (b) Plus généralement, soient $V_1, V_2, \dots, V_k$ des ensembles finis. Montrer que :
   $$\left| \bigcup_{i=1}^{k} V_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{j \in I} V_j \right|.$$
2. Soit I une partie non vide de $\{1, \dots, k\}$. Montrer que
   $$\left| \bigcap_{i \in I} U_i \right| = \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \right\rfloor^2.$$
3. Montrer que : $r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$.
4. Etude asymptotique de r_n
   (a) Montrer que
   $$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (b) Montrer que $r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.
   (c) Montrer que $\left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) = 1$. En déduire la limite de r_n.

Exercice 35 — POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES ALÉATOIRE — Soient un entier $n \geq 1$, $(a_1, ..., a_n)$ un élément de $\mathbf{C}^n$ et p le polynôme trigonométrique défini par :

$$p(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikt}.$$

1. INÉGALITÉ DE BERNSTEIN FAIBLE

   (a) Etablir la majoration :

   $$\|p'\|_\infty \leq \frac{n(n+1)}{2} \|p\|_\infty.$$

   On pose désormais $\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (b) Démontrer qu'il existe un segment S de $\mathbf{R}$ de longueur $\frac{1}{\alpha_n}$ tel que pour tout élément t de S,

   $$|p(t)| \geq \frac{\|p\|_\infty}{2}.$$

2. Dans la suite Ω est l'ensemble des n-uplets $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ tels que pour $k = 1, 2, \ldots, n$, $\omega_k \in \{-1, 1\}$, autrement dit $\Omega = \{-1, 1\}^n$

   On munit Ω de la probabilité uniforme notée $\mathbf{P}$. L'espérance d'une variable aléatoire réelle X définie sur Ω est notée $\mathrm{E}(X)$.

   Pour $k = 1, \ldots, n$, X_k est la variable aléatoire qui à tout élément $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ de Ω associe ω_k (k^{e} projection).

   Montrer que les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, et que pour $k = 1, \ldots, n$, X_k suit la loi :

   $$\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

3. MAJORATION DE L'ESPÉRANCE

   Dans la suite λ est un réel strictement positif.

   (a) Démontrer que, pour tout x réel, $\mathrm{ch} x \leq \exp(\frac{x^2}{2})$.

   (b) Soit Z la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$. Calculer $\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda \Re(Z)\big)\Big)$.

   (c) Démontrer que

   $$\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda|\Re(Z|)\big)\Big) \leq 2\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(\Re(a_k)\big)^2\right).$$

   Démontrer que

   $$\mathrm{E}\Big(\exp\big(\lambda|Z|\big)\Big) \leq 2\exp\left(\lambda^2\sum_{k=1}^{n}|(a_k)|^2\right).$$

4. INÉGALITÉ DE SALEM ET ZIGMUN

   pour tout $\omega \in \Omega$, on note p_ω le polynôme trigonométrique :

   $$p_\omega = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(\omega) \exp(ik\cdot).$$

Pour élément t des $\mathbf{R}$, soit Z_t la variable aléatoire :

$$Z_t \ : \ \Omega \to \mathbf{C}\,;\ \omega \mapsto p_\omega(t).$$

Soit enfin M la variable aléatoire donnée par, pour tout $\omega \in \Omega$, :

$$M(\omega) = \|p_\omega\|_\infty.$$

(a) Pour tout $\omega \in \Omega$, démontrer l'inégalité :

$$\frac{1}{\alpha_n} \exp\left(\frac{\lambda M(\omega)}{2}\right) \leq \int_0^{2\pi} \exp(\lambda |Z_t(\omega)|)\ \mathrm{d}t$$

(b) En déduire :

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{\lambda M}{2}\right)\right) \leq 4\pi\alpha_n \exp\left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right).$$

(c) Démontrer qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que :

$$M(\omega) \leq 2\left(\frac{\ln(4\pi\alpha_n)}{\lambda} + \lambda \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right).$$

En déduire qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que :

$$M(\omega) \leq 4\sqrt{\ln(4\pi\alpha_n) \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}.$$

Exercice 11 — **Réponses** —

1. $p_n = q_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$.
2. Pour $n = 0, 1, 2, 3$, on a $q_n = 1$ et $p_n = \frac{1}{8}$.
3. pour tout entier $n \geq 4$, $q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}$ (A_n ne peut rencontrer que A_{n-1} ou A_{n-2})
4. L'examen des racines de l'équation caractéristique associée à la récurrence linéaire précédente montre que $q_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. La continuité monotone de $\mathbf{P}$ assure la fin presque sûre du tournoi.

Exercice 18 — **Indications** —

1. $X_N \sim \mathcal{B}(N, p)$.
2. (a) $U_n = AU_n$, où $A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 1-p_1 & 1-p_2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{1-p_1+p_2}\begin{pmatrix} p_2 \\ 1-p_1 \end{pmatrix}$.

   (b) ON a $X_n = X_{n-1} + T_n$, où T_n est la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 si le n^{e} lancer donne *Pile*, son paramètre et $\mathbf{P}(S_n)$. Par téléscopage on obtient $X_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, et on obtient par Cesàro : $\mathrm{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{np_2}{1-p_1+p_2}$.

Exercice 23 — **Indication** — On vérifie que $p_n(a,b)$ prend pour $n = 1$ et $n = 2$ la même valeur $\frac{b}{a+b}$, on montre par récurrence que $(p_n(a,b))_{n\in\mathbf{N}}$ est constante grâce à la formule

$$p_{n+1}(a,b) = p_1(a,b)p_n(a,b+c) + (1-p_1(a,b))p_n(a+c,b)...$$

Exercice 26 — **Solution**

1. (a) X prend ses valeurs dans l'ensemble des matrices d'ordre deux à coefficients dans $\{0,1\}$ c'est-à-dire des applications de $\{1,2\}^2$ dans $\{0,1\}$, d'après le cours cet ensemble à pour cardinal $|\{0,1\}|^{|\{1,2\}^2|}$, donc :
   La variable aléatoire peut prendre 16 valeurs.

   (b) $\mathbf{P}_X(\{O_2\})$ est la probabilité de $\{X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, x_4 = 0\}$, mais comme les variables X_1, X_2, X_3 et X_4 sont mu tuellement indépendantes

$$\mathbf{P}_X(\{O_2\}) = \mathbf{P}_{X_1}(\{0\})\mathbf{P}_{X_2}(\{0\})\mathbf{P}_{X_3}(\{0\})\mathbf{P}_{X_4}(\{0\}) = (1-p)^4.$$

2. (a) Calculer $\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$ dans les deux cas suivant :
   — Supposons $p = 0$. D'après 1.(b), $\mathbf{P}_X(\{O_2\}) = 1$ donc la probabilité de $\{X \neq 0_2\}$ est nulle et comme $\{X \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})\} \subset \{X \neq 0_2\}$, *a fortiori*

$$\boxed{\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = 0}$$

   — Supposons $p = 1$, on montre comme en 1.(b), que $\mathbf{P}_X\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\right) = p^4 = 1$ donc la probabilité de $\left\{X \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ est nul et comme $\{X \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})\} \subset \left\{X \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, *a fortiori*

$$\boxed{\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = 0}$$

.

(b) La nécessité de la condition est évidente. Passons à sa suffisance.

Supposons que les deux colonnes C_1 et C_2 de A soient non nulles et distinctes, alors *l'ensemble* $\{C_1, C_2\}$ est un des ensembles

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Or le rang de ces parties de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ étant 2, comme le montre par exemple un calcul de déterminant, donc le rang de la famille (C_1, C_2) est 2 et donc A est inversible.

Conclusion :

$\underline{\mathrm{rg}(A) = 2 \text{ si et seulement si ses deux colonnes sont distinctes et non nulles.}}$

(c) Comme X_1, X_2, X_3 et X_4 sont mutuellement indépendantes et de même loi la probabilité, pour tout $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{0,1\}^4$, la probabilité de $\left\{X = \begin{pmatrix}a_1 & a_3\\ a_2 & a_4\end{pmatrix}\right\}$ est $\prod_{i=1}^4 \mathbf{P}_{X_1}(\{a_i\}) = p^\alpha(1-p)^{4-\alpha}$, où α est le nombre de 1 dans $\begin{pmatrix}a_1 & a_3\\ a_2 & a_4\end{pmatrix}$. D'après la question précédente il y a dans l'image de X, 4 matrices inversibles dont une colonne est $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (l'autre colonne est $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$), deux matrices inversibles dont les deux colonnes contiennent un « 1 » et un« 0 », les autres matrices ne sont pas inversibles. Donc la probabilité de $\{X \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})\}$ est la somme des probabilités que X prenne une de ces six valeurs soit :

$$\boxed{\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = 4(p)^3(1-p) + 2p^2(1-p)^2 = 2p^2(1-p^2)}$$

(d) Le trinôme du second degré $x(1-x)$ atteint son minimum sur $[0,1]$, et même sur $\mathbf{R}$, en $\frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$, il vaut $\frac{1}{4}$, donc $\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) \leq 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs si $p \leq \frac{1}{2}$ alors :

$$\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = 2p \times p \times (1-p^2) \leq 1 \times p \times (1-0) = p$$

Donc $\boxed{\mathbf{P}_X(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) \leq \min\left\{p, \frac{1}{2}\right\}}$.

3. (a) Montrons par récurrence sur l'entier $n \geq 1$, que

$$\mathbf{P}_{Y_1Y_2\ldots Y_n}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = \mathbf{P}_{Y_1}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) \times \cdots \times \mathbf{P}_{Y_n}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})),$$

propriété noté $\mathbf{R}_n$

• $\mathbf{R}_1$ est essentiellement triviale.

• Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathbf{R}_k$ soit vraie. Le produit de deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est inversible si et seulement si les deux éléments le sont donc $\{Y_1Y_2\ldots Y_kY_{k+1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))\} = \{Y_1Y_2\ldots Y_k \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}), Y_{k+1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})\}$. Or la fonction $Y_1Y_2\ldots Y_k$ des variable $Y_1, \ldots, Y_k$ et Y_{k+1} sont indépendantes puisque $Y_1, \ldots, Y_kY_{k+1}$ sont mutuellement indépendante, donc :

$$\mathbf{P}_{Y_1Y_2\ldots Y_{k+1}}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = \mathbf{P}_{Y_1Y_2\ldots Y_k}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))\mathbf{P}_{Y_{k+1}}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})).$$

Donc compte tenue de $\mathbf{R}_k$,

$$\mathbf{P}_{Y_1Y_2\ldots Y_{k+1}}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = \mathbf{P}_{Y_1}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) \times \cdots \times \mathbf{P}_{Y_k}\mathbf{P}_{Y_{k+1}}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})).$$

D'où $\mathbf{R}_{k+1}$.

On a prouvé par récurrence que $\mathbf{R}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$, ce qui, compte tenu de 2.(c), s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{P}_{Y_1Y_2\ldots Y_n}(\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})) = (2p^2(1-p^2))^n}$$

(b) Exercice... (évidente d'après 2. (d)).

4. (a) La variable T est la somme des n variables $X_{1,1}$, $X_{2,2}$,...,$X_{n,n}$, ces variables sont mutuellement indépendantes et suivent une même loi de Bernouli de paramètre p, donc T suit une loi binomiale de paramètre (n, p)

$$\boxed{T \sim \mathcal{B}(n, p)}$$

$$\boxed{\mathbf{E}(T) = np\,;\ \mathbf{V}(T) = np(1-p)}$$

(b) La matrice$P$ est la matrice associée à la transposition $(1, 2)$, donc PA est obtenue à partir de A en permutant la première et la deuxiéme ligne, AP est obtenue à partir de A en permutant la première et la deuxième colonne.

(c) Soit $B \in \mathcal{E}$, BP est obtenue à partir de B par permutation de ses colonnes c'est donc une matrice dont les coefficients sont des 0 et des 1 donc :

$$\boxed{BP \in \mathcal{E}}$$

l'application

$$\phi\ :\ \mathcal{E} \to \mathcal{E}\,;\ B \mapsto BP$$

est involutive donc une bijection.

(d) Soit $B \in \mathcal{E}$. On note pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, n$, $b_{i,j}$ le coefficient de B d'indice (i, j). Les variables $X_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, n$ étant mutuellement indépendantes,

$$\mathbf{P}_Z(B) = \prod_{(i,j)\in\{0,\ldots,n\}^n} \mathbf{P}_{X_{i,j}}(b_{i,j}) = p^{\alpha}(1-p)^{n^2-\alpha},$$

où α désigne le nombre de coefficienst de B égaux à 1. Or BP a les même coefficients que B à l'ordre près, donc autant de coefficients égaux à 1 que B, donc

$$\boxed{\mathbf{P}_Z(B) \text{ et } \mathbf{P}_Z(BP)}$$

(e) Observons pour commencer que pour tout élément C de $\mathcal{E}$, $\det(CP) = \det C \det P = -\det C$. Ensuite, la formule de transfert dit :

$$\mathbf{E}(\det Z) = \sum_{C\in\mathcal{E}} \det C\mathbf{P}_Z(C)$$

Mais compte tenu de 4.(c),

$$\mathbf{E}(\det Z) = \sum_{C\in\mathcal{E}} (-\det(CP))\mathbf{P}_Z(CP).$$

D'après 4.(c), ϕ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur lui-même, donc par changement d'indice de sommation « $C' = CP$ »

$$\mathbf{E}(\det Z) = -\sum_{C'\in\mathcal{E}} \det(C')\mathbf{P}_Z(C') = -\mathbf{E}(\det Z).$$

Donc : $\boxed{\mathbf{E}(\det Z) = 0}$

Exercice 28 — **Solution** —

1. Par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \times 0 = 0.$$

Par bilinéarité de la covariance et par mutuelle indépendance de $X_1, X_2, ..., X_n$, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$, donc

$$\mathrm{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathrm{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (\mathrm{E}(X_i^2) - \mathrm{E}(X_i)^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (\mathrm{E}(1) - \mathrm{E}(X_i)^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Donc $\sigma_n = \|(a_1, ..., a_n)\|_2$.

2. Pour tout réel t, $\mathrm{ch} t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, or pour tout entier $n \geq 0$,

$$2^n n! = 2 \times 4 \times 6 \times ... \times 2n \leq (2n)!\,,$$

donc : $\mathrm{ch} t \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, par mutuelle indépendance[2] des $\exp(\lambda a_i X_i)$, $i = 1, ..., n$, on a :

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda S_n}\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\lambda a_i X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\exp\left(\lambda a_i X_i\right)\right).$$

Or par la formule de transfert, pour $i = 1, ..., n$,

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\lambda a_i X_i\right)\right) = \exp\left(\lambda a_i\right) \mathbf{P}(X_i = 1) + \exp\left(-\lambda a_i\right) \mathbf{P}(X_i = -1) = \mathrm{ch}(\lambda a_i),$$

donc

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\lambda S_n\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\lambda a_i\right) \leq \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{\lambda^2 a_i^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2 \sigma_n^2}{2}\right).$$

3. Soient un réel $\lambda > 0$, et un entier $q \geq 1$. Le développement en série entière de la fonction exponentielle montre que pour tout réel $t \geq 0$ $\exp t \geq \frac{t^{2q}}{(2q)!}$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\lambda^{2q} S_n^{2q}}{(2q)!}\right) \leq \mathrm{E}\left(\exp\left(\lambda |S_n|\right)\right)$$

Donc par linéarité de l'espérance et positivité de l'exponentielle,

$$\mathrm{E}\left(S_n^{2q}\right) \leq \frac{(2q)!}{\lambda^{2q}} \mathrm{E}\left(\exp\left(\lambda S_n\right) + \exp\left(-\lambda S_n\right)\right) = \frac{(2q)!}{\lambda^{2q}} \mathrm{E}\left(\exp\left(\lambda S_n\right)\right) + \mathrm{E}\left(\exp\left(-\lambda S_n\right)\right).$$

et par la question précédente

$$\mathrm{E}\left(S_n^{2q}\right) \leq 2 \frac{(2q)!}{\lambda^{2q}} \exp\left(\frac{\lambda^2 \sigma_n^2}{2}\right).$$

4. Soit $q \in \mathbf{N}^*$. soit $f \;:\; \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\; \lambda \mapsto \frac{(2q)!}{\lambda^{2q}} \exp\left(\frac{\lambda^2 \sigma_n^2}{2}\right)$. Pour tout réel $\lambda > 0$, $f'(\lambda) \geq 0$ si et seulement si :

$$-\frac{2q(2q)!}{\lambda^{2q+1}} + \lambda \sigma_n^2 \frac{(2q)!}{\lambda^{2q}} \geq 0,$$

2. Voir le résultat admis.

soit si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{\frac{2q}{\sigma_n^2}}$. Donc en prenant dans l'inégalité précédente $\lambda = \sqrt{\frac{2q}{\sigma_n^2}}$, on obtient la majoration optimale :

$$\mathrm{E}\left(S_n^{2q}\right) \leq 2\frac{(2q)!\mathrm{e}^q}{2^q q^q}\sigma_n^{2q}.$$

Remarquons alors que $2(2q)! = 2 \times 2 \times 3 \times ... \times (2q) \leq (2q)^{2q}$, il vient alors :

$$\mathrm{E}\left(S_n^{2q}\right)^{\frac{1}{2q}} \leq \sqrt{2\mathrm{e}q}\,\sigma_n.$$