Fonctions de deux variables (cours de sup.)

On se donne U ouvert de $\mathbf{R}^2$, $f : U \to \mathbf{R}$; $(x, y) \mapsto f(x, y)$ et $m_0 = (x_0, y_0)$ un point de U.

Fonction de classe $\mathscr{C}^1$

Dérivées partielles en (x_0, y_0)

Sous réserve d'existence :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ est la dérivée en x_0 de $f(\cdot\,, y_0)$ en x_0 ;
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est la dérivée en y_0 de $f(x_0\,, \cdot)$ en y_0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

⚠ **L'existence en (x_0, y_0) de dérivées partielles, n'assure pas la continuité en ce point !**

Définition

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur U et sont continues sur U.

☞ **Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ alors elle est est de classe $\mathscr{C}^0$.**

Fonction gradient. Pour f de classe $\mathscr{C}^1$ on note $\boxed{\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}$

Développement limité à l'ordre 1 au voisinage de (x_0, y_0). <u>Jusqu'à la fin f est $\mathscr{C}^1$</u>

$$\underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}_{\text{accroissement de la fonction}} = \underbrace{h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\text{accroissement linéaire en } (h,k)} + \underbrace{\underset{(h,k)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|(h, k)\|)}_{\text{négligeable devant } (h,k)}.$$

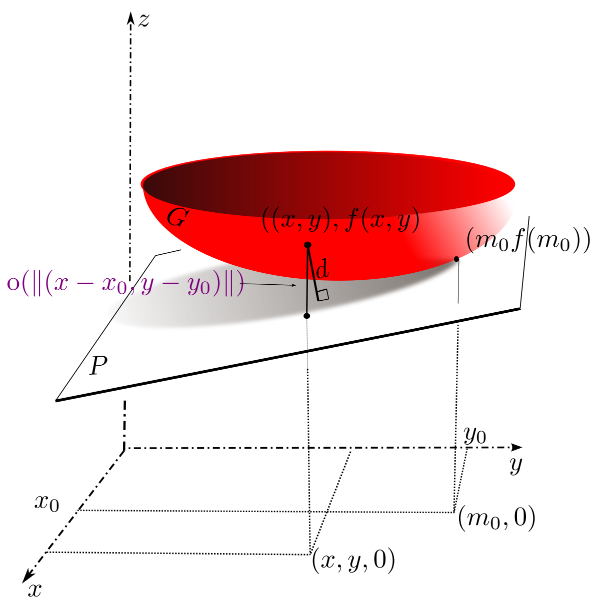

Figure 1. Distance du graphe G de f à son plan tangent P en $\big((x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.

$$\boxed{P : z = f(m_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)}\ ; \ \boxed{d := \mathrm{d}\Big((x, y, f(x, y)), P\Big) = \mathrm{o}\left(\|(x - x_0, y - y_0)\|\right)}.$$

Reformulation avec le gradient : $\boxed{f(m_0 + (h, k)) = f(m_0) + \langle \vec{\nabla} f(m_0) | (h, k) \rangle + \underset{(h,k)\to(0,0)}{\mathrm{o}}(\|(h, k)\|)}$.

☞ **Pour $\|(h, k)\|$ fixée, au premier ordre, l'accroissement de f est maximum pour (h, k) positivement colinéaire à $\vec{\nabla} f(m_0)$.**

Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^1$

Notations : γ_1 et γ_2 applications $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$; $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2)$; $F := f \circ \gamma$.

Règle de la chaîne

F est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $t \in I$:

$$F(t) = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$
$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\, \gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\, \gamma_2'(t).$$

Reformulation avec le gradient

$$(f \circ \gamma)'(t) = \left\langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)) \middle| \vec{\gamma}'(t) \right\rangle,$$

dérivée en t de f le « long de l'arc γ ».

Application. Soient V un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et

$$g \ : \ V \to \mathbf{R}\,; (u_1, u_2) \mapsto f(\phi(u_1, u_2), \psi(u_1, u_2)),$$

$(\phi, \psi) \in \mathscr{C}^1(V, \mathbf{R})^2$, (ϕ, ψ) à valeurs dans U.

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u_{1(2)}}(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(u_1, u_2), \psi(u_1, u_2))\, \frac{\partial \phi}{\partial u_{1(2)}}(u_1, u_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(u_1, u_2), \psi(u_1, u_2))\, \frac{\partial \psi}{\partial u_{1(2)}}(u_1, u_2)}$$

Définition. *Dérivée de f suivant $\vec{v}$ en m_0, où $\vec{v} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathrm{D}_{\vec{v}} f\,(m_0) := (f \circ \gamma_0)'(0)$; dans le cas particulier $\gamma_0 \ : \ t \mapsto m_0 + t\vec{v}$.*

$$\boxed{\mathrm{D}_{\vec{v}} f\,(m_0) = \left\langle \vec{\nabla} f(m_0) \middle| \vec{v} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(m_0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0)\, v_2.}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathrm{D}_{(1,0)} f(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathrm{D}_{(0,1)} f(x_0, y_0)$.

☞ **Si $\gamma(I)$ est inclus dans une ligne de niveau de f alors :**

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\gamma(t)) \perp \vec{\gamma}'(t).}$$

« Le vecteur gradient est normal aux lignes de niveaux », voir figure en bas à droite.

Extremums locaux

Proposition. *si f de* ***classe*** *$\mathscr{C}^1$ admet en m_0, point de l'***ouvert** *U un extremum local, alors :*

$$\vec{\nabla} f(m_0) = (0,0) \text{ (point critique).}$$

⚠ **Résultat faux lorsque f est la restriction à D non ouvert d'une application $\mathscr{C}^1$.**

$\boxed{f_1 \ : \ \mathrm{D_f}((0,0); 1) \to \mathbf{R}\,; \ (x, y) \mapsto x^2 + y^2.}$

Maximum (global même) en $(1, 0)$ et $\vec{\nabla} f_1(1, 0) = (2, 0)$ (point non critique).

⚠ **La réciproque est fausse.**

$\boxed{f_2 \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,; \ (x, y) \mapsto x^2 - y^2.}$

Le point $(0, 0)$ est critique et f_2 n'y admet pas d'extremum.