

Utilisation des théorèmes de sommation par paquets

Soit I est un ensemble (dans la pratique dénombrable).

Cas des familles positives

Les théorèmes de ce paragraphe donne des **équivalences** à la sommabilité.

On considère $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs ou nuls**.

Sommation par paquets pour les familles de réels positifs ou nuls

Soient J un ensemble et $\{I_j\}_{j \in J}$ une partition de I . Alors on a

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i \leq +\infty.$$

☞ En particulier $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$ est finie.

CAS PARTICULIER : suite double $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ à termes **positifs ou nuls**. $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, deux partitions $\{\{p\} \times \mathbb{N}\}_{p \in \mathbb{N}}$ et $\{\mathbb{N} \times \{q\}\}_{q \in \mathbb{N}}$.

Interversion de sommation, Fubini-Tonelli

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \leq +\infty.$$

☞ Ce théorème permet de prouver la sommabilité d'une suite double en sommant d'abord par rapport à un indice puis par rapport à l'autre.

Exercice type : montrer l'existence et donner la valeur de $\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$.

Solution —

La famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est une famille de réels POSITIFS ou nuls.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{q \geq 0} u_{p,q}$ converge, la somme de cette série (téléscopique, géométrique...) se calcule sans mal :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = s(p).$$

La série $\sum_{p \geq 0} s(p)$ converge et sa somme vaut $\sum_{p=0}^{+\infty} s(p) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = S$.

Donc par le théorème de Fubini-Tonelli, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$ converge et $\sum_{q \geq 0} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ converge de plus

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = S.$$

☞ On procède ainsi quand on ne sait pas calculer la somme de $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$, tout au plus sait-on que cette série converge. Notons que S est la somme de la famille sommable $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$.

Cas des familles de réels ou complexes

Les théorèmes de ce paragraphe exigent la **sommabilité** et donnent des propriétés qu'elle **implique**.

On considère $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbf{K}$, où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Sommation par paquets pour les familles de réels ou complexes

Soit $\{I_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ une partition de I . On suppose la famille $(u_i)_{i \in I}$ SOMMABLE. Alors

— pour tout entier naturel n , $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable ;

— la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ converge ;

— enfin $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) = \sum_{i \in I} u_i$.

☞ Pour prouver la sommabilité de $(u_i)_{i \in I}$, on utilise souvent le théorème de sommation par paquets pour une famille de réels positifs ou nuls

• Sommabilité.

— Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. La famille $(|u_i|)_{i \in I_{n_0}}$ est sommable. En effet..... Calculons sa somme $\sum_{i \in I_{n_0}} |u_i| = \dots = \dots = p_{n_0}$.

— La série $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge, en effet.....

Donc $(|u_i|)_{i \in n_0}$ et donc $(u_i)_{i \in n_0}$ sont sommables.

• Calcul de la somme. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On sait que $(u_i)_{i \in I_{n_0}}$ est sommable. Calculons sa somme : $\sum_{i \in I_{n_0}} u_i = \dots = s_{n_0}$.

On sait, par le théorème de sommation par paquets des familles sommables d'éléments de $\mathbf{K}$, que $\sum_{n \geq 0} s_n$ converge et

que :
$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n.$$

Théorème de Fubini Lebesgue pour les suites doubles réelles ou complexes

Soient $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbf{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes. On suppose que la famille $(|u_{p,q}|)_{(p,q) \in \mathbf{N}^2}$ est SOMMABLE. Alors on a l'égalité, toute les quantités qui y figurent étant bien définies (dans $\mathbf{C}$),

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{(p,q) \in \mathbf{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right).$$

Exercice type : montrer l'existence et donner la valeur de $\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$.

Solution—

• Sommabilité.

— Pour tout élément p de $\mathbf{N}$, $\sum_{q \geq 0} |u_{p,q}|$ converge, sa somme (téléscopique, géométrique...) se calcule et vaut $s(p)$.

— La série $\sum_{p \geq 0} s(p)$ converge.

Donc par le th. de **Fubini-Tonelli**, la famille positive $(|u_{p,q}|)_{(p,q) \in \mathbf{N}^2}$ et donc la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbf{N}^2}$ sont sommables.

• Calcul de la somme. On sait que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\sum_{q \geq 0} u_{p,q}$ converge, la somme de cette série (téléscopique, géométrique...) se calcule et vaut t_p . Par le théorème de **Fubini-Lebesgues**, toute les termes suivants sont bien définis et

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} t_p.$$