A propos des formes bilinéaires symétriques

Soient $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $\mathbf{E}$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, Φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$,

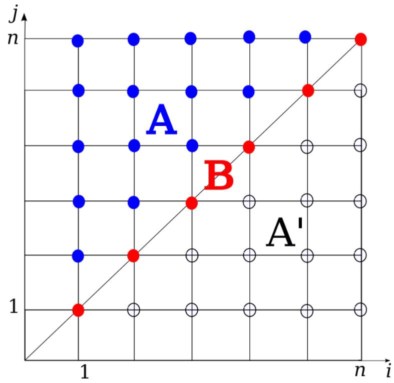
$$Q\ :\ \mathbf{E}\to\mathbf{K}\,;\ \mathbf{x}\mapsto\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x})\ \text{(forme quadratique associée à } \Phi\text{)}$$

et $(\mathbf{x}_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille d'éléments de $\mathbf{E}$.

Forme quadratique d'une somme

$$Q\left(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\dots+\mathbf{x}_n\right)=\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}\Phi(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}Q(\mathbf{x}_i)}_{\mathrm{B}}+\underbrace{\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]\\ i\neq j}}\Phi(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)}_{\mathrm{A+A'}}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}Q(\mathbf{x}_i)}_{\mathrm{B}}+2\underbrace{\sum_{1\leq i<j\leq n}\Phi(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)}_{\mathrm{A}}.$$

☞ La symétrie n'est utile que pour l'ultime égalité.



Exemple 1. $\mathbf{E}=\mathbf{K}$; Φ multiplication de deux nombres ; $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ famille d'éléments de $\mathbf{K}$.

$$\boxed{(x_1+x_2+\dots+x_n)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j}$$

Exemple 2. $\mathbf{K}=\mathbf{R}$; Φ un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbf{E}$; $Q=\|\cdot\|^2$.

$$\boxed{\|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\dots+\mathbf{x}_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{x}_i\|^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n}(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_j)}$$

☞ Si $(\mathbf{x}_i)_{i=1,\dots,n}$ est **orthogonale** alors :

$$\|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\dots+\mathbf{x}_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{x}_i\|^2.$$

Exemple 3. $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ famille de v.a. réelles sur un espace probabilisé ; Φ covariance ; Q variance.

$$\boxed{\mathrm{V}(X_1+X_2+\dots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)}$$

☞ Si les X_i sont **indépendantes deux à deux** alors :

$$\mathrm{V}(X_1+X_2+\dots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i).$$

Cas particulier, applications

$(\mathbf{E},(\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ des éléments de $\mathbf{E}$.

Équation mère :

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}),. \tag{1}$$

Substitution de $-\mathbf{y}$ à $\mathbf{y}$:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \tag{2}$$

De (1) :

$$\boxed{(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2\right).}$$

Première égalité de polarisation.

De (1)-(2) :

$$\boxed{(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\right).}$$

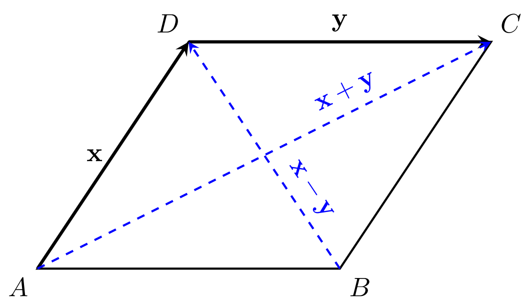
Seconde égalité de polarisation.

De (1)+(2) :

$$\boxed{2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 hnj.}$$

Égalité du parallélogramme.

Interprétation dans le plan euclidien : *Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés..*



☞ Ces cinq égalités existent pour une forme bilinéaire symétrique quelconque, en particulier pour la covariance, cf. exemple 3.