

Bases de $\mathbf{K}[X]$ et $\mathbf{K}[X]_n$

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et par n un élément de $\mathbf{N}^*$.

Bases tayloriennes

Soient $a \in \mathbf{K}$, $\mathcal{B}_c = (X^i)_{i \in \mathbf{N}}$, $\mathcal{B}_a = \left(\frac{(X-a)^i}{i!} \right)_{i \in \mathbf{N}}$ et $\mathcal{B}_{a,n} = \left(\frac{(X-a)^i}{i!} \right)_{i=0, \dots, n}$.

Bases

Les familles $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}_a$ sont des bases de $\mathbf{K}[X]$ la première est dite canonique.

La famille $\mathcal{B}_{a,n}$ est une base de $\mathbf{K}[X]_n$.

Pour $i \in \mathbf{N}$, on pose $T_i = \frac{(X-a)^i}{i!}$. Alors pour tout $j \in \mathbf{N}$, $T_i^{(j)}(a) = \delta_{i,j}$. D'où :

Isomorphismes réciproques ϕ et ψ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X]_n & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{K}^{n+1} \\ & \xleftarrow{\psi} & \\ \phi : P & \mapsto & (P^{(0)}(a), P^{(1)}(a), \dots, P^{(n)}(a)) \\ \sum_{i=0}^n c_i \frac{(X-a)^i}{i!} & \longleftarrow & (c_0, c_1, \dots, c_n) : \psi \end{array}$$

$\mathcal{B}_{a,n}$ est l'image par ψ de la base canonique de $\mathbf{K}^{n+1}$.

Décomposition dans $\mathcal{B}_a$. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$.

$$P = \sum_{i=0}^{+\infty} P^{(i)}(a) T_i = \sum_{i=0}^{+\infty} P^{(i)}(a) \frac{(X-a)^i}{i!} \quad (\text{formule de Taylor})$$

☞ On utilise les bases tayloriennes dans les exercices qui font appel aux valeurs du polynôme et de ses dérivées en un point.

Produits scalaires $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (HP)

L'application

$$\Phi_a : \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}; (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} P^{(i)}(a) Q^{(i)}(a)$$

est un produit scalaire. La base $\mathcal{B}_a$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire.

L'application

$$\Psi : \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}; (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} \frac{Q^{(i)}(0)}{i!}$$

est un produit scalaire. La base canonique est une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ip\theta) d\theta = \delta_{0,p}$ d'où :

Expression intégrale d'un polynôme (HP)

Soient P et Q des éléments de $\mathbf{R}[X]$, $P = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j X^j$, $Q = \sum_{j=0}^{+\infty} q_j X^j$.

$$\Psi(P, Q) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j q_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\exp(i\theta)) Q(\exp(-i\theta)) d\theta \quad p_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\exp(i\theta)) \exp(-ij\theta) d\theta = \Psi(P, X^j)$$

Bases lagrangiennes

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbf{K}$ deux à deux distincts. On pose pour $i = 0, 1, \dots, n$,

$$L_i = \prod_{\substack{j=0, \dots, n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \quad \text{et} \quad \mathcal{L} = (L_i)_{i=0, \dots, n}$$

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$

Base

La famille $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbf{K}[X]_n$ (base des polynômes de Lagrange aux points $a_0, a_1, \dots, a_n$).

Isomorphismes réciproques f et g :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}[X]_n & \xrightarrow{f} \mathbf{K}^{n+1} \\ & \xleftarrow{g} \\ f : P & \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \\ \sum_{i=0}^n b_i L_i & \xleftarrow{\quad} (b_0, b_1, \dots, b_n) : g \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ est l'image par g de la base canonique de $\mathbf{K}^{n+1}$.

Polynôme d'interpolation

Soit $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$, il existe un et un seul élément P de $\mathbf{K}[X]_n$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = b_i,$$

$$\text{c'est } P = g(b_0, \dots, b_n) = \sum_{i=0}^n b_i L_i.$$

Décomposition dans $\mathcal{L}$.

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$$

Cas particulier : $1 = \sum_{i=0}^n 1 \times L_i$, $X = \sum_{i=0}^n a_i L_i$, plus généralement $X^k = \sum_{i=0}^n a_i^k L_i$, pour $k = 0, \dots, n$.

$$\text{Matrice de passage : } P_{\mathcal{L}}^{(X^0, \dots, X^n)} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \quad (\text{matrice de Vandermonde}).$$

☞ On utilise les bases lagrangiennes dans les exercices qui font appel aux valeurs du polynôme en $n+1$ points.

Produits scalaires $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (HP)

L'application

$$\Psi_L : \mathbf{R}[X] - n \times \mathbf{R}[X]_n \rightarrow \mathbf{R}; (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^n P(a_i) Q(a_i)$$

est un produit scalaire. La base $\mathcal{L}$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire.